



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

174.

175.

176.



# NIEUW ARCHIEF

VOOR

## WISKUNDE.

---

***Deel IX.***

---

AMSTERDAM,  
PETIT & SIKKEN,

1882.



Δ

Sci 900.30



*Schier fund*

*Het „Nieuw Archief voor Wiskunde” wordt uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam, „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven.”*

*De inrichting en het doel van dit Tijdschrift zijn dezelfde gebleven als in de Voorrede van het Eerste Deel werd aangekondigd. Hierbij valt echter op te merken*

*ad 2. C, dat bij de wiskundige tijdschriften, die in het Register voorkomen, de „Nouvelle Correspondance Mathématique” (N. Corr. M.) heeft opgehouden te bestaan, en daarentegen „Mathesis” (M.) is opgetreden.*

*Terwijl herinnerd wordt aan*

*3. De verantwoordelijkheid der geplaatste stukken blijft voor rekening van den Schrijver.*

LEIDEN, December 1882.

DE REDACTEUR,

D. BIERENS DE HAAN,

*Eerste Secretaris van het Genootschap,  
onder de zinspreuk:*

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.

# INHOUD.



Over het verband tusschen de wortels eener vergelijking en die van hare afgeleide. Door F. J. VAN DEN BERG . . .	Blz. 1.
Over de onderlings afwijking van den grootte-cirkelboog en de loxodromische kromme tusschen twee nabijgelegen plaatsen op de bolvormige aarde. Door F. J. VAN DEN BERG „	15.
Over een meetkundig vraagstuk van kansrekening. Door F. J. VAN DEN BERG . . . . .	„ 32.
Naschrift over het verband tusschen de wortels eener vergelijking en die van hare afgeleide. Door F. J. VAN DEN BERG „	60.
Stoomverdeelings-systeem van Gebr. Sulzer. Door L. JANSE Bz. „	61.
Over de figuur, welke ontstaat, wanneer men op de zijden van een driehoek parallelogrammen beschrijft. Door Dr. M. C. PARAIRA . . . . .	„ 87.
Een stereometrisch analogon van het theorema van Pappus. Door Dr. M. C. PARAIRA . . . . .	„ 96.
Over eenige theorema's omtrent oneindige reeksen. Door T. J. STIELTJES JR. . . . .	„ 98.
Eenige bemerkingen omtrent de differentiaal-quotienten van eene functie van ééne veranderlijke. Door T. J. STIELTJES JR. „	106.
Over de transformatie van de periodieke functie $A_0 + A_1 \cos \phi + B_1 \sin \phi \dots + A_n \cos n \phi + B_n \sin n \phi$ . Door T. J. STIELTJES JR. . . . .	„ 111.
Over een paar met elkaar samenhangende involutorische birationeele transformaties. Door P. H. SCHOUTE . . . . .	„ 117.

---

Beantwoording der prijsvraag „Welk is het gedeelte van het  
bolvormig oppervlak der zon, dat bij eene zoneclips door  
de maan voor het oog bedekt wordt”. Door L. JANSE Bz.  
(Wordt vervolgd) . . . . . Blz. 141.

**Kleinere mededeelingen.**

Over het gebruik van determinanten bij de methode der  
kleinste kwadraten. Door P. VAN GEER . . . . . „ 180.  
Onderwerpen behandeld op de wetenschappelijke winterver-  
gaderingen, 26 November 1879—22 Maart 1882 . . . „ 189.  
Over het quadratische rest-karakter van het getal 2. Door  
T. J. STIELTJES JR. . . . . „ 193.  
Bewijs van de stelling, dat een geheele rationale functie altijd,  
voor zekere reële of complexe waarden van de verander-  
lijke, de waarde nul aanneemt. Door T. J. STIELTJES JR. „ 196.  
Over een algorithmus voor het meetkundig midden. Door  
T. J. STIELTJES JR. . . . . „ 198.

**Register, naar de onderwerpen gerangschikt, op eenige  
Wiskundige Tijdschriften.**

Analytische meetkunde op het plat vlak — Waarschijnlijkheids-  
rekening . . . . . „ 212.

---

# OVER HET VERBAND TUSSCHEN DE WORTELS EENER VERGELIJKING EN DIE VAN HARE AFGELEIDE,

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

1. De door Dr. G. J. LEGEBEKE langs analytischen weg, zoowel in Deel VIII, Stuk 1, blz. 75—80, van dit Tijdschrift, als ook op eenigzins andere wijze in Tome XVI, 3<sup>e</sup> Livr., pag. 273—278, van de *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, bewezen en op blz. 79 voorkomende stelling, namelijk:

„De wortels van  $f'(z) = 0$  liggen binnen of op de zijden van een veelhoek met uitspringende hoeken, die zoodanig geconstrueerd is, dat al de wortels van  $f(z) = 0$  binnen dien veelhoek liggen of op zijne zijden”,

— in welke stelling  $f(z) = 0$  eene willekeurige  $n^{\text{de}}$  machtsvergelijking met bestaanbare of complexe coëfficiënten, en  $f'(z) = 0$  hare afgeleide is, terwijl ook de wortels van ieder dier vergelijkingen bestaanbaar of complex kunnen wezen, — is ook vatbaar om door meetkundige of statische beschouwingen aangetoond te worden. Stelt men daartoe in het algemeen de  $n$  wortels van  $f(z) = 0$  door  $a_1$  tot  $a_n$  en de  $n-1$  wortels van  $f'(z) = 0$  door  $b_1$  tot  $b_{n-1}$  voor, dan kan men uitgaan van de identiteit  $\prod_1^n (z-a) = f(z)$ , wier logarithmisch afgeleide

$$\sum_1^n \frac{1}{z-a} = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\prod_1^{n-1} (z-b)}{\prod_1^n (z-a)}$$

kan worden opgevat als uitdrukking van de algemeene eigenschap, dat de zoogenaamde meetkundige som of resultante der meetkundig omgekeerde afstanden van een willekeurig punt  $z$  tot de  $n$  wortelpunten  $a$  van eenige vergelijking  $f(z) = 0$  gelijk is aan  $n$ -maal het

meetkundig product der afstanden van  $z$  tot de  $n-1$  wortelpunten  $b$  der afgeleide vergelijking  $f'(z) = 0$ , gedeeld door het meetkundig product der afstanden van  $z$  tot de  $n$  wortelpunten  $a$  zelve. Laat men nu het willekeurige punt  $z$  samenvallen met één der wortelpunten  $b$ , waardoor één der in den teller van het tweede of van het derde lid als factoren voorkomende afstanden gelijk nul wordt, dan is in de genoemde algemeene eigenschap de bijzondere vervat (die men ook desverkiezende op dezelfde wijze onmiddellijk had kunnen aantoonen, zonder van de algemeene eigenschap melding te maken), dat de resultante der meetkundig omgekeerde afstanden van eenig wortelpunt van  $f'(z) = 0$  tot de  $n$  wortelpunten van  $f(z) = 0$  gelijk nul is. En merkt men verder op, stellende  $i = \sqrt{-1}$ , dat, als in het algemeen  $\rho$  de lengte of den modulus en  $\phi$  den richtingshoek of het argument van een straal of meetkundigen afstand  $b-a = \rho(\cos \phi + i \sin \phi) = \rho e^{i\phi}$  voorstelt, alsdan de omgekeerde afstand,  $\frac{1}{b-a} = \frac{1}{\rho}(\cos \phi - i \sin \phi) = \frac{1}{\rho} e^{-i\phi}$ , wel is waar niet alleen de omgekeerde lengte  $\frac{1}{\rho}$ , maar ook den tegengestelden richtingshoek  $-\phi$  vertoont, doch dat deze laatste omstandigheid bij het construeeren der resultante slechts tot eene symmetrische omzetting der figuur ten opzichte van de  $as$  der hoeken, en dus tot geene verandering in afmetingen of vorm der figuur zelve aanleiding geeft; dan kan men, door voor eenig punt  $b$  in verband met alle punten  $a$  hetzij de voorwaarde  $\sum_1^n \frac{1}{b-a} = 0$  zelve in statischen zin te vertolken, hetzij op te merken, dat deze voorwaarde zich splitst in de beide  $\sum_1^n \frac{1}{\rho} \cos \phi = 0$  en  $\sum_1^n \frac{1}{\rho} \sin \phi = 0$ , dus ook zeggen, dat ieder wortelpunt van  $f'(z) = 0$  gekenmerkt is als een zoodanig punt, waarop krachten, gericht naar alle wortelpunten van  $f(z) = 0$  en omgekeerd evenredig aan de afstanden tot deze punten, elkander in evenwicht houden. Dewijl nu van een dergelijk evenwicht blijkbaar alleen sprake kan wezen voor punten  $b$ , liggende binnen den veelhoek, die alle punten  $a$  omvat, is dus ook op deze wijze de door den Heer LEGEBEKE behandelde stelling bewezen; en tevens aangetoond, dat het geval, dat eenig punt  $b$  op eene zijde van dien veelhoek zou vallen, niet anders kan voorkomen dan wanneer, tengevolge van het in ééne rechte lijn liggen van alle punten  $a$ , de veelhoek zelf in deze rechte lijn ontaardt, die in dat geval dan ook alle punten  $b$  moet bevatten. In dit zelfde geval trouwens kan men

een stap verder gaan en voor ieder punt  $\delta$  op zich zelf eene nadere grensbeperking aangeven: immers is het duidelijk, dat men nu door verschuiving telkens tusschen twee opvolgende punten  $\alpha$  een punt moet kunnen vinden, waarvoor de wederzijdsche sommen van omgekeerde afstanden tot alle aan denzelfden kant liggende punten  $\alpha$  gelijk zijn, en dat dus werkelijk een evenwichtspunt  $\delta$  is. Is de bedoelde rechte lijn de as der hoeken zelve (en zoo straks zal blijken dat zich het beschouwde geval in wezenlijkheid altijd hiertoe laat terugbrengen), dan komt men dus neder op hetgeen, voor het geval van enkel bestaانبare wortels  $\alpha$ , het theorema van ROLLE omtrent de wortels  $\delta$  leert.

Heeft de vergelijking  $f(z) = 0$  wel niet uitsluitend bestaانبare wortels, maar toch coëfficiënten, die alle bestaabaar zijn, dan komen hare complexe wortels twee aan twee toegevoegd voor; dat is, het stelsel wortelpunten  $\alpha$  is dan symmetrisch ten opzichte van de as der hoeken. De voorgaande beschouwing levert dan blijkbaar voor ieder evenwichtspunt  $\delta$  ook een symmetrisch evenwichtspunt  $\bar{\delta}$  op, zoodat ook het stelsel  $\bar{\delta}$  symmetrisch is en naar behooren de complexe wortels van  $f'(z) = 0$  als twee aan twee toegevoegde doet kennen.

2. Ook andere eigenschappen der hoogere-machtsvergelijkingen kunnen uit de vorenstaande statische beschouwing worden afgeleid. Stel, om een voorbeeld te noemen, dat de onderlinge afstanden van een willekeurig aantal  $m$  der wortelpunten  $\alpha$  klein zijn in vergelijking van hunne afstanden tot de overigen, dan verkrijgen voor willekeurige punten in de nabijheid van de groep dezer  $m$  punten  $\alpha$  de krachten naar de overige punten  $\alpha$  een ondergeschikten invloed, zoodat althans sommige, en wél de nabij die groep gelegen evenwichtspunten  $\delta$  bij benadering te vinden moeten zijn door de overige punten  $\alpha$  buiten beschouwing te laten, als wanneer volgens de behandelde stelling  $m-1$  zulke punten  $\delta$  binnen meergenoemde groep van  $m$  punten  $\alpha$  blijken te liggen. Overgaande nu tot het grensgeval, waarin  $m$  punten  $\alpha$  samenvallen en waarin dus tevens de evenbedoelde benaderde aanwijzing eene nauwkeurige wordt, blijkt dat voor ieder stel van  $m$  gelijke wortels der vergelijking  $f(z) = 0$  ook  $m-1$  maal diezelfde wortel voldoet aan  $f'(z) = 0$ .

3. In het algemeene geval van den veelhoek  $\alpha$  schijnt het niet zoo gemakkelijk, in denzelfden geest als zoo even voor het geval der rechte lijn, de wortels  $\delta$  van elkander te scheiden door middel van eene nadere begrenzing voor ieder op zich zelf. Dat zij bijv. nu niet noodwendig telkens in de nabijheid van twee wortels  $\alpha$  moeten liggen, kan blijken uit het voorbeeld van de binomiaal-vergelijking  $f(z) = z^n - 1 = 0$ , gevende  $f'(z) = nz^{n-1} = 0$ ; zoodat, terwijl nu

de  $n$  wortelpunten  $a$  regelmatig over een cirkelomtrek met straal 1 verdeeld zijn en alzoo voor groote  $n$  betrekkelijk dicht bijéénliggen, alle  $n-1$  wortelpunten  $b$  in het betrekkelijk ver daarvan verwijderde middelpunt of den oorsprong samenvallen.

Toch kunnen ook in het algemeene geval enkele nadere betrekkingen tusschen het stelsel  $a$  en het stelsel  $b$  worden aangegeven. Men heeft namelijk, door de afgeleide van het laatste lid van

$$f(z) = \prod_1^n (z-a) = z^n - z^{n-1} \Sigma a + z^{n-2} \Sigma aa_1 - z^{n-3} \Sigma aa_1 a_2 + \text{enz.}$$

gelijk te stellen aan het laatste lid van

$$f'(z) = n \prod_1^{n-1} (z-b) = nz^{n-1} - n z^{n-2} \Sigma b + n z^{n-3} \Sigma bb_1 - n z^{n-4} \Sigma bb_1 b_2 + \text{enz.},$$

(waarin de sommen in  $a$  en in  $b$  betrekking hebben op alle producten der wortels  $a_{(1 \text{ tot } n)}$  en  $b_{(1 \text{ tot } n-1)}$  genomen 1 aan 1, 2 aan 2, enz.,  $n$  aan  $n$  of  $n-1$  aan  $n-1$ ), de  $n-1$  betrekkingen

$$\frac{\Sigma a}{n} = \frac{\Sigma b}{n-1}, \quad \frac{\Sigma aa_1}{n} = \frac{\Sigma bb_1}{n-2}, \quad \frac{\Sigma aa_1 a_2}{n} = \frac{\Sigma bb_1 b_2}{n-3}, \quad \text{enz.}$$

Bepaalt men zich nu in hoofdzaak tot eene nadere beschouwing van de beide eerste of eenvoudigste van deze betrekkingen, dan drukt de eerste het samenvallen der zwaartepunten van het stelsel der ieder met de gewichts- of massa-eenheid bedeed gedachte  $n$  wortelpunten  $a$  van  $f(z) = 0$  en van het overeenkomstige stelsel der  $n-1$  wortelpunten  $b$  van  $f'(z) = 0$  uit; zooals ook daaruit blijkt dat, stellende  $a = \alpha + i\alpha'$  en  $b = \beta + i\beta'$ , waarin dan  $a$  en  $\alpha'$  abscis en ordinaat zijn van het punt  $a$ , en  $\beta$  en  $\beta'$  evenzoo van  $b$ , de bedoelde betrekking zich splitst in de beide  $\frac{\Sigma a}{n} = \frac{\Sigma \beta}{n-1}$  en  $\frac{\Sigma \alpha'}{n} = \frac{\Sigma \beta'}{n-1}$ . Dit samenvallen kan in het voorbijgaan ook in ver-

band worden gebracht met de opmerking, dat de herhaalde toepassing van de bewezen algemeene stelling leert, dat binnen den veelhoek der  $n$  wortelpunten  $a$  van de oorspronkelijke vergelijking  $f(z) = 0$  ligt die der  $n-1$  wortelpunten  $b$  van de eerste afgeleide  $f'(z) = 0$ ; daarbinnen die der  $n-2$  wortelpunten  $c$  van de tweede afgeleide  $f''(z) = 0$ ; hierbinnen weder die der  $n-3$  wortelpunten  $d$  van de derde afgeleide  $f'''(z) = 0$ , enz.; terwijl eindelijk de binnen alle voorgaande vallende veelhoek der wortelpunten van de  $(n-1)^\circ$  afgeleide of eerste-machtsvergelijking  $f^{(n-1)}(z) = 0$  zich bepaalt tot het enkele gemeenschappelijke zwaartepunt van al de opvolgende stelsels, waartoe die veelhoeken behooren.

Het samenvallen der zwaartepunten van de stelsels  $a$  en  $b$  geble-

ken zijnde, verhindert niets, ten einde zich gemakkelijker rekenschap te geven van de meetkundige of statische beteekenis der tweede gevonden betrekking  $\frac{\Sigma a a_1}{n} = \frac{\Sigma b b_1}{n-2}$ , den oorsprong naar dit zwaartepunt te verplaatsen, dat is ieder der wortels  $a$ , en dan ook iedere  $b$ , met zoodanige waarde  $\frac{\Sigma a}{n} = \frac{\Sigma b}{n-1}$  te verminderen, dat in de vergelijking op de nieuwe wortels  $a$ , en in die op de nieuwe wortels  $b$ , die weder geene andere dan hare afgeleide is, gelijktijdig de tweede term komt te ontbreken. Ook voor deze beide nieuwe vergelijkingen blijft dan de genoemde betrekking  $\frac{\Sigma a a_1}{n} = \frac{\Sigma b b_1}{n-2}$  gelden, maar omdat nu  $\Sigma a = 0$  en  $\Sigma b = 0$ , en dus  $\Sigma a a_1 = \frac{1}{2} \{(\Sigma a)^2 - \Sigma a^2\} = -\frac{1}{2} \Sigma a^2$  en  $\Sigma b b_1 = \frac{1}{2} \{(\Sigma b)^2 - \Sigma b^2\} = -\frac{1}{2} \Sigma b^2$  is, kan men die betrekking thans onder den meer geschikten vorm  $\frac{\Sigma a^2}{n} = \frac{\Sigma b^2}{n-2}$  brengen. En deze splitst zich bij substitutie van  $a = \alpha + i\alpha'$  en  $b = \beta + i\beta'$  in de beide  $\frac{\Sigma \alpha^2 - \Sigma \alpha'^2}{n} = \frac{\Sigma \beta^2 - \Sigma \beta'^2}{n-2}$  en  $\frac{\Sigma \alpha \alpha'}{n} = \frac{\Sigma \beta \beta'}{n-2}$ , waarin  $\Sigma \alpha^2$  en  $\Sigma \alpha'^2$  de traagheidsmomenten van het stelsel  $a$  voor de ordinaten- en de abscissen-as, en  $\Sigma \alpha \alpha'$  het zoogenaamde meetkundig of centrifugaal-moment of ook het traagheidsproduct voor deze assen voorstellen, terwijl  $\Sigma \beta^2$ ,  $\Sigma \beta'^2$  en  $\Sigma \beta \beta'$  dezelfde beteekenis voor het stelsel  $b$  hebben. Hiermede zijn dus reeds eenvoudige betrekkingen tusschen deze momenten voor het gemeenschappelijk zwaartepunt der beide stelsels aangewezen. Maar evenals met dit zwaartepunt zelf naar behooren het geval is, is ook hier uit den aard der zaak te voorzien, dat de betrekkingen tusschen beide stelsels, waarvan het tweede, dat der evenwichtspunten  $b$ , noodwendig geheel door het eerste, dat der  $a$ , bepaald is, onafhankelijk van de richting van het aangenomen rechthoekig coördinatenstelsel moeten zijn. De beide laatstgenoemde betrekkingen moeten dus ook invariant zijn bij den overgang tot eenig nieuw assenstelsel, makende bijv. een hoek  $\mu$  met het oorspronkelijke; en werkelijk blijkt dit ook reeds dadelijk, doordien de enkele betrekking  $\frac{\Sigma \alpha^2}{n} = \frac{\Sigma b^2}{n-2}$ , die beiden samenvatte, ook noodwendig met zich brengt  $\frac{\Sigma (\alpha e^{-i\mu})^2}{n} = \frac{\Sigma (b e^{-i\mu})^2}{n-2}$ , waarin  $\alpha e^{-i\mu}$  en  $b e^{-i\mu}$  juist niet anders zijn dan de waarden, die  $a$  en  $b$



bij den overgang tot het nieuwe assenstelsel verkrijgen. Of ook, door in  $a e^{-i\mu} = (a + ia')(Cos \mu - i Sin \mu)$  en  $\Sigma (a e^{-i\mu})^2 = \Sigma \{(\alpha^2 - \alpha'^2) + 2i\alpha\alpha'\} (Cos 2\mu - i Sin 2\mu)$  de producten uit te werken, blijken, in overeenstemming met de bekende formules uit de analytische meetkunde, de nieuwe  $\alpha$  en  $\alpha'$  tot waarde te hebben  $\alpha Cos \mu + \alpha' Sin \mu$  en  $-\alpha Sin \mu + \alpha' Cos \mu$ , en de nieuwe  $\Sigma \alpha^2 - \Sigma \alpha'^2$  en  $\Sigma \alpha \alpha'$  tot waarde  $Cos 2\mu. (\Sigma \alpha^2 - \Sigma \alpha'^2) + 2 Sin 2\mu. \Sigma \alpha \alpha'$  en  $-\frac{1}{2} Sin 2\mu. (\Sigma \alpha^2 - \Sigma \alpha'^2) + Cos 2\mu. \Sigma \alpha \alpha'$ , en evenzoo in  $\beta$  en  $\beta'$ ; zoodat door de som der producten van de twee meergenoemde betrekkingen, eensdeels met  $Cos 2\mu$  en  $2 Sin 2\mu$ , ten andere met  $-\frac{1}{2} Sin 2\mu$  en  $Cos 2\mu$ , te nemen, deze werkelijk blijken niet alleen voor de momenten op de oorspronkelijke assen, maar even goed voor de overeenkomstige momenten op de nieuwe assen te gelden. Meer in het bijzonder kan men dan ook het nieuwe assenstelsel in zoodanige richting nemen, dat de meetkundige momenten van de beide stelsels  $a$  en  $b$  gelijktijdig nul worden; waardoor in andere woorden het bewijs geleverd is, dat beide stelsels, en dan ook weder de boven ingevoerde verdere afgeleide stelsels  $c$ ,  $d$ , enz., dezelfde hoofdtraagheidsassen in hun gemeenschappelijk zwaartepunt hebben. In dat geval worden dus, nadat door de verlegging van den oorsprong naar dit zwaartepunt in de beide vergelijkingen  $f(z) = 0$  en  $f'(z) = 0$  reeds gelijktijdig de tweede termen verdreven zijn, thans bovendien door deze assenwenteling, bepaald door de formule  $Tg 2\mu = \frac{2 \Sigma \alpha \alpha'}{\Sigma \alpha^2 - \Sigma \alpha'^2} = \frac{2 \Sigma \beta \beta'}{\Sigma \beta^2 - \Sigma \beta'^2}$ , gelijktijdig de coëfficiënten van hare derde termen, tengevolge van het verdwijnen der onbestaanbare gedeelten, bepaaldelijk tot bestaanbare waarden teruggebracht. En de eerst omschreven vermindering der wortels met  $\frac{\Sigma a}{n} = \frac{\Sigma b}{n-1}$ , gevolgd door hunne thans aangewende deeling door den factor  $e^{i\mu}$ , zijn dan ook de twee alleen mogelijke bewerkingen, waarbij, terwijl de beide stelsels wortelpunten  $a$  en  $b$  worden teruggebracht tot rechthoekige coördinatenassen, die ten opzichte daarvan den meest eenvoudigen stand hebben, de betrekkelijke ligging dezer stelsels zelve onveranderd wordt gelaten. Tevens blijkt hier, dat — indien de na verplaatsing van den oorsprong naar het zwaartepunt, dat is na verdrijving van den tweeden term, verkregen vergelijking  $f(z) = z^n + z^{n-2} \Sigma a a_1 - \text{enz.}$  zelve bekend is, waarin dan boven de coëfficiënt  $\Sigma a a_1 = -\frac{1}{2} \Sigma \alpha^2 = -\frac{1}{2} \{(\Sigma \alpha^2 - \Sigma \alpha'^2) + 2i \Sigma \alpha \alpha'\}$  bevonden werd, — de richtingshoek  $\mu$  van het stelsel der hoofdtraagheidsassen, die ook den factor  $e^{i\mu}$  ter deeling der wortels bepaalt, dadelijk

aangewezen wordt als helft van het argument  $\text{Boog } Tg \frac{2 \Sigma \alpha \alpha'}{\Sigma \alpha^2 - \Sigma \alpha'^2} = 2\mu$  van evengenoemden coëfficiënt. Komt daarentegen niet zoozeer de vergelijking  $f(z) = 0$  zelve, maar het stelsel van hare wortelpunten  $\alpha$ , als gegeven voor, dan heeft men ter bepaling der hoofdassen de formule  $Tg 2\mu = \frac{2 \Sigma \alpha \alpha'}{\Sigma \alpha^2 - \Sigma \alpha'^2}$  te construeeren.

Tot zoover over de beide eerste betrekkingen, die boven uit de onderlinge vergelijking der overeenkomstige coëfficiënten van  $f(z)$  en  $f'(z)$  werden afgeschreven. Wilde men in denzelfden geest een onderzoek instellen omtrent de derde van deze betrekkingen, namelijk de betrekking  $\frac{\Sigma \alpha \alpha_1 \alpha_2}{n} = \frac{\Sigma b b_1 b_2}{n-3}$  tusschen de vierde coëfficiënten in beide functiën, alsmede omtrent alle verdere dergelijke betrekkingen, dan zou men o. a. tot het besluit komen dat, zooals trouwens wel van te voren is in te zien wegens de door de betrekkingen zelve uitgesproken evenredigheid telkens der overeenkomstige coëfficiënten, de mogelijkheid bestaat, — hetzij reeds bij behoud van den aanvankelijken oorsprong, hetzij meer in het bijzonder nadat de oorsprong naar het gemeenschappelijk zwaartepunt der stelsels  $\alpha$  en  $b$  is verlegd, — aan den richtingshoek  $\mu$  van een nieuw rechthoekig assenstelsel telkens zoodanige andere waarde te geven, dat óf de vierde, óf de vijfde, óf de zesde, enz. coëfficiënten in  $f(z)$  en  $f'(z)$  beiden gelijktijdig van hunne in het algemeen complexe waarden tot bestaانبare worden teruggebracht. Dat aan eene dergelijke wenteling der assen evenwel niet zulk eene eenvoudige meetkundige of statische beteekenis te hechten is als aan hare boven ter zake van de twee eerste betrekkingen  $\frac{\Sigma \alpha}{n} = \frac{\Sigma b}{n-1}$  en  $\frac{\Sigma \alpha \alpha_1}{n} = \frac{\Sigma b b_1}{n-2}$  beschouwde verplaatsingen, is de reden, waarom hier met dit onderzoek niet verder zal worden voortgegaan.

In plaats van het samenstel zelf der punten  $\alpha$  en  $b$  op nieuwe coördinaten-assen te beschouwen, kan men daarentegen uit dit samenstel met behoud van de oorspronkelijke assen nog andere dergelijke samenstellen afleiden. Vervangt men daartoe in de identiteit

$$f'(z) = \frac{d f(z)}{dz} \text{ of } n \prod_1^{n-1} (z-b) = \frac{d \cdot \prod_1^n (z-a)}{dz} \text{ de willekeurige veran-}$$

derlijke  $z$  met name door hare lineaire functie  $\frac{z-B}{A}$ , waarin  $A$  en

$B$  willekeurige bestaanbare of complexe standvastigen voorstellen, dan gaat deze identiteit, na vermenigvuldiging met  $A^{n-1} = \frac{A^n}{A}$ , over in

$$n \prod_1^{n-1} \{z - (Ab + B)\} = \frac{d \cdot \prod_1^n \{z - (Aa + B)\}}{dz}, \text{ en leert dus onder de-}$$

zen vorm  $Ab + B$  kennen als wortelpunten der afgeleide van de vergelijking, die  $Aa + B$  tot wortelpunten heeft. En op deze wijze wordt alzoo uit het oorspronkelijk samenstel  $(a, b)$ , — door daarop eerst eene door modulus en argument van de standvastige  $A$  bepaalde vervorming uit den oorsprong als gelijkvormigheidspunt met gelijktijdige wenteling om dit punt, en vervolgens nog eene evenzoo door  $B$  bepaalde evenwijdige verplaatsing toe te passen, — een nieuw samenstel  $(Aa + B, Ab + B)$  van denzelfden aard gevonden, dat trouwens, gelijkvormig gebleven met het oorspronkelijke, zich daarvan overigens alleen door willekeurigen stand onderscheidt.

4. Terwijl wij niet verder zullen stilstaan bij de bepaling der gemeenschappelijke hoofdtraagheidsassen van de stelsels  $a$  en  $b$  in het algemeen, moge toch nog het volgende daaromtrent voor het bijzondere geval der derde-machtsvergelijking worden opgemerkt, als wanneer dus uit drie gegeven wortelpunten  $a_1, a_2$  en  $a_3$ , de beide bijbehorende wortelpunten  $b_1$  en  $b_2$  gevonden moeten worden. Op grond van het vorenstaande moeten deze beide punten op eene der hoofdassen van het zwaartepunt van het stelsel  $a_1 a_2 a_3$  liggen, en wél — omdat tevens hunne gelijke afstanden of abscissen  $\beta$  wederzijds dit zwaartepunt bepaald worden, krachtens hetgeen voor  $n = 3$  de algemeene betrekking  $\frac{\Sigma a^2 - \Sigma a'^2}{n} = \frac{\Sigma \beta^2 - \Sigma \beta'^2}{n-2}$  leert, door de formule

$$\Sigma \beta^2 = 2\beta^2 = \frac{\Sigma a^2 - \Sigma a'^2}{3}, \text{ — op diegene der beide hoofdassen, die}$$

als abscissenas genomen eene positieve waarde voor  $\Sigma a^2 - \Sigma a'^2$  geeft. En wat nu meer in het bijzonder het vinden van de richting dezer hoofdassen aangaat, daartoe kan men in dit geval geschikt gebruik maken van de eigenschap dat, evenals het zwaartepunt der drie gewichts- of massa-eenheden in  $a_1, a_2, a_3$  samenvalt met dat van den driehoek  $a_1 a_2 a_3$  zelf, zoo ook voor dit zwaartepunt de hoofdassen van het stelsel der drie punten en van den driehoek langs elkander vallen. Immers, — noemende bijv.  $p$  de wederzijds gelijke loodrechte afstanden van  $a_2$  en  $a_3$  tot de door  $a_1$  en door het zwaartepunt gaande lijn, dat is de hoogte der twee gelijke driehoe-

ken met deze lijn als basis, waarin driehoek  $a_1 a_2 a_3$  wordt ingedeeld, — dan is het traagheidsmoment der drie punten ten opzichte van deze lijn gelijk  $2p^2$ , en dat van den driehoek zelf, als  $I$  zijn inhoud voorstelt, gelijk  $\frac{1}{6}Ip^2$ ; zoodat de verhouding  $\frac{1}{12}I$  dezer beide momenten, onafhankelijk zijnde van de keus van het aangenomen punt  $a_1$ , en dus onveranderd blijvende indien men op dezelfde wijze van  $a_2$  of van  $a_3$  was uitgegaan, reeds uitwijst, dat de concentrische traagheidsellipsen van het stelsel der drie punten en van den driehoek zelf tevens homothetisch zijn en dus ook samenvallende assen hebben; en tot hetzelfde besluit komt men ten overvloede evenzeer door dien, noemende bijv.  $h$  de hoogte van driehoek  $a_1 a_2 a_3$  voor  $a_2 a_3$  als basis, het traagheidsmoment der drie punten ten opzichte van eene lijn door het zwaartepunt evenwijdig aan deze basis bedraagt  $\frac{2}{3}h^2$ , en dat van den driehoek zelf  $\frac{1}{18}Ih^2$ ; zoodat ook hier weder naar behooren dezelfde verhouding  $\frac{1}{12}I$  bestaat. Voor de hoofdassen van het stelsel der drie punten zijn dus die van den driehoek te nemen; maar deze vallen weder langs de assen, hetzij van de grootste ingeschreven ellips, die namelijk de drie zijden ieder in haar midden aanraakt, hetzij van de kleinste omgeschreven ellips, die namelijk in de drie hoekpunten de raaklijnen evenwijdig aan de overstaande zijden heeft: het zoo even aangehaalde moment  $\frac{1}{6}Ip^2$ , ten opzichte van de door  $a_1$  gaande deellijn van den driehoek, leert toch de langs de drie deellijnen vallende halve middellijnen der traagheidsellips kennen als omgekeerd evenredig aan de overeenkomstige afstanden  $p$ , dat is als rechtstreeks evenredig aan de deellijnen zelve, of ook aan hare derde gedeelten; en deze ellips kan alzoo bijv. gelegd worden door de op de deellijnen liggende middelpunten der drie zijden; zij zal dan tevens de zijden in deze punten aanraken, omdat iedere zijde, evenwijdig loopende aan de lijn der middelpunten van de beide anderen, welke lijn door de overeenkomstige deellijn van den driehoek wordt middendoor gedeeld, de in de ellips aan deze deellijn toegevoegde richting heeft. Denkt men zich eindelijk nog een plat vlak in zoodanige richting, dat daarop de rechthoekige projectie van de beschouwde figuur een gelijkzijdige driehoek met in- of met omgeschreven cirkel wordt, of stelt men zich omgekeerd de beschouwde figuur als rechthoekige projectie van de laatstgenoemde voor, dan kan men noch zeggen, dat de hoofdassen voor het zwaartepunt van den driehoek, dus ook die voor het stelsel der drie gegeven wortelpunten  $a_1, a_2, a_3$ , dus ook de lijn der beide te vinden wortelpunten  $b_1$  en  $b_2$  en de loodlijn op haar midden, evenwijdig zijn aan en

loodrecht op den doorgang met een vlak, waarop de gegeven driehoek  $a_1 a_2 a_3$  zich als een gelijkzijdigen zou projecteeren of omgekeerd. En houdt men zich aan deze omgekeerde opvatting, dan geeft zij nog aanleiding tot de opmerking, dat de beide wortelpunten  $b_1$  en  $b_2$  niet anders zijn dan de brandpunten der grootste ingeschreven ellips van den driehoek der wortelpunten  $a_1, a_2$  en  $a_3$ . Immers als deze driehoek een gelijkzijdige is, en als voor zijne traagheidsellips dus de ingeschreven cirkel mag genomen worden, wiens straal  $r$  zij, dan is het moment der drie punten ten opzichte van iedere as door het zwaartepunt even groot, dus ook gelijk aan dat voor eene as, die, door één der drie punten gaande, de beide andere punten op wederzijdsche afstanden  $r\sqrt{3}$  laat; zoodat men in dat bijzondere geval heeft het verband  $\Sigma \alpha^2 = \Sigma \alpha'^2 = 2(r\sqrt{3})^2 = 6r^2$ . Projecteer nu op een vlak, dat door de abscissenas gaande een willekeurigen hellingshoek  $\phi$  maakt, dan worden de halve assen der elliptische projectie van evengenoemden cirkel gelijk  $r$  en  $r \cos \phi$ , terwijl de momenten der drie geprojecteerde punten ten opzichte van deze assen de waarden  $\Sigma (\alpha' \cos \phi)^2 = \cos^2 \phi \cdot \Sigma \alpha'^2 = 6r^2 \cos^2 \phi$  en  $\Sigma \alpha^2 = 6r^2$  aannemen; en dan geven deze waarden, in de plaats van  $\Sigma \alpha'^2$  en  $\Sigma \alpha^2$  gesteld in de boven gevonden formule  $2\beta^2 = \frac{\Sigma \alpha^2 - \Sigma \alpha'^2}{3}$ ,

$$\text{tot uitkomst } \beta^2 = \frac{6r^2 - 6r^2 \cos^2 \phi}{6} = r^2 - (r \cos \phi)^2, \text{ waarmede}$$

werkelijk  $\beta$  als halve brandpuntsafstand der elliptische projectie, dat is der grootste ingeschreven ellips van driehoek  $a_1 a_2 a_3$ , gekenmerkt is.

Let men nog op de eigenschap, dat de beide lijnen uit een willekeurig punt naar de brandpunten eener kegelsnede getrokken, wederzijds gelijke hoeken maken met de beide raaklijnen uit dat punt (zie bijv. BAIOT et BOUQUET, *Géométrie analytique*, 4<sup>e</sup> Ed., 1863, pag. 216—217), dan blijken de beide wortelpunten  $b_1$  en  $b_2$  ook een paar aan elkander in den driehoek  $a_1 a_2 a_3$  toegevoegde punten te vormen van de soort, zooals zij werden beschouwd in het tweede gedeelte, blz. 86—90, van mijne in Deel VII, Stuk 1, blz. 78—90, opgenomen bijdrage: trouwens, aldaar had de opmerking gemaakt kunnen worden, dat omgekeerd ieder paar zoodanige toegevoegde punten, op grond van de even aangehaalde eigenschap, niet anders is dan het paar der brandpunten van eene der (in oneindig groot aantal van de tweede orde voorkomende) aan den beschouwden driehoek ingeschreven kegelsneden.

Na aangewezen te hebben, hoe op deze wijze de beide wortelpun-

ten  $b_1$  en  $b_2$  gevonden kunnen worden uit de drie wortelpunten  $a_1$ ,  $a_2$  en  $a_3$ , moge ten slotte uit de beschouwing derzelfde figuur nog het besluit getrokken worden, dat, als omgekeerd  $b_1$  en  $b_2$  met één der drie punten  $a$  gegeven waren, de beide overige punten  $a$  te bepalen zouden zijn als de twee andere hoekpunten van een driehoek, — omschreven aan de ellips, die  $b_1$  en  $b_2$  tot brandpunten heeft, en door het punt gaat, dat den afstand van het gegeven punt  $a$  tot het midden van  $b_1 b_2$  halveert, — en tegelijkertijd ingeschreven aan de door  $a$  zelf gaande concentrische en homothetische ellips.

5. Terugkeerende voor het geval van willekeurige  $n$  tot de aanvankelijke beschouwing van ieder wortelpunt  $b$  als evenwichtspunt voor krachten, gericht naar alle wortelpunten  $a$  en omgekeerd evenredig aan de afstanden tot deze punten, kan het, om meetkundig te verifiëren of eenig aangenomen punt  $b$  aan deze voorwaarde voldoet, van belang zijn eene eenvoudige constructie te kennen, waardoor het enkele of resulterende punt  $A$  wordt aangewezen, dat met betrekking tot  $b$  de werking van twee bekende punten bijv.  $a$  en  $a_1$  kan vervangen; ten einde door herhaalde toepassing van deze constructie te onderzoeken, of werkelijk alle gegeven wortelpunten  $a$  te samen het punt  $b$  in evenwicht houden. Zoodanige constructie zou reeds voortvloeien uit de in den aanhef betoogde algemeene eigenschap, krachtens welke voor  $n = 2$ , en nemende voor het toen willekeurige punt  $z$  thans het punt  $b$ , de resultante  $bA$  der meetkundig omgekeerde afstanden  $ba$  en  $ba_1$  gelijk is aan tweemaal den afstand van  $b$  tot het midden van  $aa_1$ , gedeeld door het meetkundig product van  $ba$  en  $ba_1$  zelve; dat wil zeggen,  $bA$  en de resultante van  $ba$  en  $ba_1$  zelve moeten wederzijds gelijke hoeken met  $ba$  en  $ba_1$  maken, terwijl bovendien haar product gelijk aan dat van  $ba$  en  $ba_1$  moet wezen. Eenvoudiger evenwel is het resulterend punt  $A$  te bepalen als tweede snijpunt van een cirkel, die  $ba$  in  $b$  raakt en door  $a_1$  gaat, met een cirkel, die  $ba_1$  in  $b$  raakt en door  $a$  gaat; want in de aldus gevormde figuur is  $\angle abA = \frac{1}{2}$  eerste boog  $bA = \angle ba_1A$ , en  $\angle a_1bA = \frac{1}{2}$  tweede boog  $bA = \angle baA$ , dus ook  $\angle bAa = \angle bAa_1 = 180^\circ - \angle aba_1$ , zoodat de gelijkheid der loodlijnen, uit  $b$  op  $aA$  en op  $a_1A$ , geeft  $ba \sin a_1 bA = ba_1 \sin abA = bA \sin aba_1$ ; ten bewijze, dat werkelijk de krachten  $\frac{1}{ba}$ ,  $\frac{1}{ba_1}$  en  $-\frac{1}{bA}$ , ieder evenredig zijnde aan den sinus van den hoek telkens tusschen de twee overigen, evenwicht maken. In de gelijkvormige driehoeken

$baA$  en  $ba_1A$  heeft men nog  $\frac{aA}{bA} = \frac{bA}{a_1A} = \frac{ba}{ba_1}$ , dus  $bA^2 = aA \cdot a_1A$  en  $\frac{ba^2}{ba_1^2} = \frac{aA}{a_1A}$ , terwijl de gelijkvormigheid van deze zelfde driehoeken met de twee gelijk driehoeken, waarin het parallelogram op  $ba$  en  $ba_1$  door de diagonaal uit  $b$  zou worden ingedeeld, weder tot het zoo even gevondene terugvoert. Nog kan men opmerken, dat  $A$  op elken cirkel ligt, gaande door  $b$  en door een paar van punten  $c$  en  $c_1$ , zoodanig op  $ba$  en  $ba_1$  genomen, dat  $bc:ca = c_1a_1:bc_1$ , is; want de gelijkvormige driehoeken  $bcA$  en  $a_1c_1A$  geven dan steeds  $\angle bcA = \angle a_1c_1A = 180^\circ - \angle bc_1A$ . En eindelijk, in verband hiermede (zie ook bijv. BRIOT et BOUQUET, *Géométrie analytique*, 4<sup>e</sup> Ed., 1863, pag. 216—217), is ook het resulteerende punt  $A$  te omschrijven als brandpunt eener parabool, die  $ba$  in  $a$  en  $ba_1$  in  $a_1$  zou aanraken.

6. Het even gezegde heeft betrekking op de samenstelling der werkingen van twee of meer punten  $a$  op een zelfde punt  $b$ . Wederkeerig verdient nog het volgende opmerking ten aanzien van de gezamenlijke werking van alle punten  $b$  op een zelfde punt  $a$ , bijv. het

$$\text{punt } a_k. \text{ De identiteit } f'(z) = \frac{d.f(z)}{dz} \text{ of } n \prod_1^{n-1} (z-b) = \frac{d \cdot \prod_1^n (z-a)}{dz} = \\ = \frac{d \left\{ (z-a_k) \prod_1^{n-1} (z-a) \right\}}{dz} = \prod_1^{n-1} (z-a) + (z-a_k) \frac{d \cdot \prod_1^{n-1} (z-a)}{dz}, \text{ — waarin}$$

$\prod_1^{n-1} (z-a)$  dus beteekent het product der  $n-1$  factoren  $z-a$ , komende door aan  $a$  alle aanwijzers 1 tot  $n$ , behalve alleen den aanwijzer  $k$  zelf, toe te kennen, — geeft door nogmaals naar  $z$  te differentieeren de identiteit

$$n \frac{d \cdot \prod_1^{n-1} (z-b)}{dz} = \frac{d \cdot \prod_1^{n-1} (z-a)}{dz} + \frac{d \cdot \prod_1^{n-1} (z-a)}{dz} + (z-a_k) \frac{d^2 \cdot \prod_1^{n-1} (z-a)}{dz^2};$$

neemt men nu in deze identiteiten meer in het bijzonder  $z = a_k$ , waardoor in beiden de laatste term verdwijnt, dan geeft het quotient van de tweede door de eerste de betrekking

$$\frac{d \cdot \log \prod_1^{n-1} (a_k-b)}{da_k} = 2 \frac{d \cdot \log \prod_1^{n-1} (a_k-a)}{da_k},$$

dat is

$$\sum_1^{n-1} \frac{1}{a_k-b} = 2 \sum_1^{n-1} \frac{1}{a_k-a},$$

die uitdrukt, dat, ten aanzien van een willekeurig punt  $a_k$  van het stelsel der wortelpunten  $a$ , de resultante der naar alle afgeleide wortelpunten  $b$  gerichte krachten valt langs en de dubbele grootte heeft van de resultante der naar alle overige wortelpunten  $a$  gerichte krachten; of met andere woorden, dat ten aanzien van  $a_k$  het resulteerend punt van alle  $b$  in het midden ligt tusschen  $a_k$  zelf en het resulteerend punt van alle overige  $a$ . Door deze uitkomst wordt o. a. bevestigd, dat de gezamenlijke werking van alle punten  $b$ , niet op een enkel punt  $a$  op zich zelf, maar op alle punten van het stelsel  $a$ , gelijk zijnde aan het dubbel van de gezamenlijke werkingen van alle punten  $a$  onderling, welke laatste elkander twee aan twee opheffen, gelijk nul is; zooals wel het geval moet wezen, omdat juist voor ieder punt  $b$  op zich zelf de werkingen op alle punten  $a$  elkander in evenwicht houden.

7. In den aanvang van dit opstel is gewezen op de omstandigheid, dat, bij de omkeering van den afstand  $b-a = \rho (\cos \phi + i \sin \phi)$ , de richtingshoek  $\phi$  geene andere verandering ondergaat dan eene omkeering van teeken, en dat het hieraan is toe te schrijven, dat de

voorwaarde  $\sum_1 \frac{1}{b-a} = 0$  mag worden opgevat als uitdrukking van

het aldaar omschreven evenwicht. Dat daarentegen in andere dergelijke gevallen niet altijd zulk eene eenvoudige meetkundige of statische beteekenis kan gehecht worden aan de analytische voorwaarde,

kan o. a. blijken uit het meer algemeene voorbeeld  $\sum_1^n (b-a)^m = 0$ ,

waarin weder  $a_{(1 \text{ tot } n)}$  de wortels eener gegeven vergelijking  $f(z) = 0$  voorstellen, terwijl  $m$  een willekeurige positieve of negatieve, geheele of gebroken exponent zou kunnen zijn, die in het behandelde geval gelijk  $-1$  was. Het gaat nu niet aan, de (in het geval van geheele positieve  $m$  ten getale van  $m$  voorkomende) wortelpunten  $b$  van deze vergelijking op te vatten als evenwichtspunten van een stelsel naar  $a$  gerichte en aan de  $m^{\text{de}}$  machten der afstanden tot  $a$  evenredige krachten; immers voor ieder der  $n$  termen  $(b-a)^m$ , waaruit de aangeduide som bestaat, moet de richtingshoek  $m$ -maal zoo groot genomen worden als de voor den straal  $b-a$  in de figuur voorkomende; en hiermede gaat dus — behalve in het eenvoudige geval  $m = 1$ , als wanneer het eenige aan de voorwaarde  $\sum_1^n (b-a) = 0$  voldoende punt  $b$ , namelijk het zwaartepunt van het stelsel  $a$ , werkelijk evenwichtspunt is voor krachten langs en evenredig aan de afstanden tot



$a$ , en in het boven behandelde geval  $m = -1$ , — in het algemeen eene vervorming van de betrekkelijke ligging der punten  $a$  en  $b$  gepaard. Voor willekeurige  $m$  mag dan ook niet besloten worden, hetgeen voor  $m = 1$  en  $m = -1$  wél geldt, dat de wortelpunten  $b$  steeds binnen den veelhoek der wortelpunten  $a$  zouden liggen. Zoo liggen bijv. in het geval van  $f(z) = z^2 - a^2 = 0$ , waarbij aan  $f'(z) = 2z = 0$  alleen de oorsprong, of het zwaartepunt of midden van de beide wortelpunten  $z = \pm a$  voldoet, de twee voor  $m = 2$  aan  $\sum_1^2 (b-a)^2 = (b-a)^2 + (b+a)^2 = 2(b^2 + a^2) = 0$  voldoende wortelpunten  $b = \pm ia$ , in plaats van op de lijn der beide  $a$ , wederzijds deze lijn, en wel zóó, dat zij met de beide punten  $a$  de hoekpunten van een vierkant vormen. Daarentegen ligt wel, als  $m$  geheel positief is, ieder der opvolgende door  $\sum_1^n (z-a)^m = 0$ ,  $\sum_1^n (z-a)^{m-1} = 0$ ,  $\sum_1^n (z-a)^{m-2} = 0$ , enz. bepaalde stelsels wortelpunten  $b, c, d$ , enz. binnen alle voorgaande stelsels, en dat wél juist op grond van de boven bewezen stelling, daar toch de zoo even geschreven vergelijkingen achterevolgens elkanders afgeleiden zijn. En bovendien hebben niet alleen deze opvolgende stelsels dus weder een gemeenschappelijk zwaartepunt en gemeenschappelijke hoofdtraagheidsassen in dit punt, maar, wat meer is, zoowel zwaartepunt als hoofdassen zijn dezelfde als die voor het oorspronkelijke aan  $f(z) = 0$  voldoende stelsel  $a$  en de daaruit afgeleide  $f'(z) = 0$ ,  $f''(z) = 0$ ,  $f'''(z) = 0$ , enz.; immers vooreerst blijkt uit de onderlinge vergelijking van de twee eerste coëfficiënten in ieder der vergelijkingen

$$f(z) = \prod_1^n (z-a) = z^n - z^{n-1} \sum a + z^{n-2} \sum aa_1 - z^{n-3} \sum aa_1 a_2 + \text{enz.}$$

en

$$\sum_1^n (z-a)^m = nz^m - \binom{m}{1} z^{m-1} \sum a + \binom{m}{2} z^{m-2} \sum a^2 - \binom{m}{3} z^{m-3} \sum a^3 + \text{enz.},$$

dat de hierdoor bepaalde twee stelsels hetzelfde zwaartepunt  $\frac{\sum a}{n}$

hebben, terwijl ten andere door den oorsprong naar dit punt te verplaatsen de derde coëfficiënt  $\sum aa_1$  in de eerste vergelijking boven bleek gelijk  $-\frac{1}{2} \sum a^2$  te worden, en dus door dezelfde wenteling der coördinaten-assen bestaanbaar kan worden gemaakt als die in de tweede vergelijking, ten blyke van het samenvallen der hoofdassen.

OVER DE ONDERLINGE AFWIJING VAN DEN GROOTE-  
CIRKELBOOG EN DE LOXODROMISCHE KROMME  
TUSSCHEN TWEE NABIJGELEGEN PLAATSEN  
OP DE BOLVORMIGE AARDE,

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

In een in Deel VII, Stuk I, 1880, blz. 91—101, opgenomen opstel over „Groot cirkel zeilen”, is door den Heer L. JANSSE Bz. op blz. 97, formule (10), door berekening gevonden  $K'' = K' - K = \frac{\lambda}{2} \sin b$ , als benaderde waarde van het verschil der hoeken van afvaart  $K$  volgens den grooten cirkel  $ABA'$  (zie de figuur op Plaat I) en  $K'$  volgens de loxodroom  $ACA'$  tusschen twee nabijgelegen plaatsen  $A$  en  $A'$  op den aardbol, die door hare geographische lengten  $l$  en  $l'$  en breedten  $b$  en  $b'$  gegeven zijn, en waarvoor  $\lambda = l' - l$  het lengteverschil is.

Deze formule kan ook vrij eenvoudig meetkundig worden bewezen. Stelt namelijk  $P$  de naastbijgelegen aardpool,  $QPT$  de aardas,  $PA$  den meridiaan van  $A$  en  $PA'$  dien van  $A'$  voor, dan mag men, zoolang de hoeken  $K$ ,  $K'$ ,  $K''$  niet nauwkeuriger verlangd worden dan tot dezelfde orde van grootte, waartoe het lengteverschil  $\lambda$ , het breedteverschil  $b' - b$  en de bogen of afstanden  $ABA'$  en  $ACA'$  behooren, de beschouwing der in werkelijkheid op den bol gelegen figuur vervangen door die van hare projectie op het vlak, dat den bol in  $A$  raakt en dus de raaklijnen  $AT$  van den meridiaan,  $AB$  van den grooten cirkel en  $AD$  van de loxodroom in genoemd punt bevat. Dat deze vervanging geoorloofd is, is o. a. af te leiden uit de algemeene eigenschap, dat, als men eene willekeurige vlakke figuur

projecteert op een vlak, dat daarmede een' kleinen hoek van de eerste orde maakt, in beide figuren niet alleen de verhoudingen van overeenkomstige inhouden en van overeenkomstige afstanden, welke verhoudingen door cosinussen van kleine hoeken worden aangegeven, maar dan ook de verhoudingen der sinussen van overeenkomstige niet of al kleine hoeken — door iederen sinus te schrijven als quotient van den dubbelen inhoud van een op de beenen van den hoek afgesneden driehoek door het product der beenen, — en eindelijk ook de verhoudingen van overeenkomstige hoeken zelve, slechts in de tweede orde van de eenheid afwijken. Uit deze eigenschap volgt namelijk eene dergelijke bij het projecteeren van eenig klein gedeelte van een gebogen oppervlak op het raakvlak van een nabijgelegen punt van dat oppervlak. Meer in het bijzonder blijven in het tegenwoordige geval niet alleen de hoeken in A zelve geheel onveranderd, maar ook de in het raakvlak van A' liggende hoeken van den meridiaan met den grooten cirkel en met de loxodroom aldaar ondergaan bij het projecteeren op het raakvlak van A slechts veranderingen van de tweede orde, en de hoek der beide laatste krommen onderling slechts eene verandering van de derde orde; al welke veranderingen alzoo verwaarloosd mogen worden. Bovendien mag dan tevens de projectie der raaklijn van den meridiaan in A', welke projectie eigenlijk uitloopt op een punt der geprojecteerde aardas, dat is van AT, dat op kleinen afstand van de eerste orde van T verwijderd is, en die dus, wegens  $\angle ATA'$  zelf van de eerste orde, een' kleinen hoek van slechts de tweede orde met A'T maakt, geacht worden met A'T samen te vallen. Voor alle tusschen A en A' liggende punten, hetzij van den grooten cirkel of van de loxodroom, gelden blijkbaar dezelfde opmerkingen. En daardoor is men dan gerechtigd, in het raakvlak van A niet alleen den grooten cirkel, wiens vlak loodrecht op dat raakvlak staat, te vervangen door de rechte lijn AA', maar tevens de loxodroom te beschouwen als de kromme, die alle door T in het raakvlak getrokken rechte lijnen snijdt onder den standvastigen koershoek  $TAD = K'$  der loxodroom; dat is te beschouwen als de door A en A' gaande logarithmische spiraal met T tot pool.

Het koers- of azimuthverschil  $K''$  op den bol is dus bij den verlangden graad van benadering niet anders dan de hoek tusschen de koorde AA' en de raaklijn AD dezer logarithmische spiraal. Zij nu A'D de raaklijn derzelfde kromme in A', dus  $\angle TA'D = 180^\circ - K'$ , dan is in den door de beide voerstralen en de beide raaklijnen ge-

vormden vierhoek TADA' de som der overstaande hoeken A en A' gelijk 180°, zoodat die vierhoek in een cirkel past, en dus ook de hoek A'Da der raaklijnen gelijk is aan den hoek ATA' der voerstralen (welk een en ander zelfs zou gelden, ook al was AA' geen kleine, maar een willekeurige boog der logarithmische spiraal). Maar juist omdat hier AA' klein is, hebben de hoeken der koorde AA' met de raaklijnen in hare uiteinden onderling een verschil, dat in vergelijking van deze kleine hoeken zelve van de eerste orde en dus in werkelijkheid slechts van de tweede orde is; en mag men dus nemen  $K'' = A'AD = AA'D = \frac{1}{2} A'Da = \frac{1}{2} ATA'$ . Denkt men zich nu, om dezen hoek ATA' te meten, uit T met TA als straal een' cirkelboog tot aan TA' beschreven, dan mag deze niet alleen, hetgeen voor het tegenwoordige doel voldoende zou zijn, tot in de eerste, maar wat meer is en zoo straks van dienst zal wezen, tot in de tweede orde worden opgevat als de bij het lengteverschil  $\lambda$  behoorende parallelboog AA'' van A; immers, stelt men zich de raaklijn van den door A' gaanden meridiaan in het uiteinde A'' van dezen parallelboog voor, dan heeft het werkelijke punt A' van den aardbol een' afstand van de tweede orde tot deze raaklijn, welke afstand, evenwijdig loopende aan den aardstraal van A'', een' hoek van de eerste orde maakt met den straal van A, dat is met de normaal op het vlak van teekening, en dus op dat vlak eene projectie van slechts de derde orde heeft; hieruit volgt, dat in dat vlak ook de hoek ATA' slechts in de derde orde verschilt van den hoek tusschen TA en de projectie van TA'', dus (bij toepassing van de boven aangehaalde algemeene eigenschap op de verhouding van den hoek ATA'' der eerste orde en diens projectie) evenzeer slechts een verschil van de derde orde heeft met dezen hoek ATA'' zelf, die eindelijk, behoudens wederom een verschil van de derde orde tusschen den in zijn vlak uit T beschreven cirkelboog AA'' en den parallelboog AA'', door dezen laatsten boog gemeten wordt. En van dáár alzoo, dat tot in de tweede orde hoek ATA' gelijk mag worden genomen aan het quotient van genoemden parallelboog, die de loodlijn  $AQ = AT \sin ATQ = AT \sin \delta$  op de aardas tot straal en  $\lambda$  tot middelpuntshoek heeft, gedeeld door AT, dat is  $\angle ATA' = \frac{\lambda \cdot AQ}{AT} = \lambda \sin \delta$ , terwijl men ten slotte — maar wat dit betreft, slechts tot in de eerste orde nauwkeurig, — heeft de verlangde formule

$$K'' = \frac{1}{2} ATA' = \frac{\lambda}{2} \sin \delta.$$

2. Niet alleen kan op deze wijze, onafhankelijk van de formules voor de beide koershoeken  $K$  en  $K'$  zelve, de formule voor hun verschil worden opgemaakt, maar tevens kunnen, ofschoon iets meer omslachtig, de formules voor ieder dezer koershoeken voor zich uit dezelfde figuur tot in de eerste orde worden afgeleid, indien men zich daartoe slechts nauwkeurig rekenschap blijft geven van de verschillende orden van grootte der te beschouwen hoeken en lijnen.

Beginnen wij met den koershoek  $TAA' = K$  van den grooten cirkel. De loodlijn  $A'E$  op  $AT$  nederlatende, is  $Tg K = \frac{A'E}{AE} = \frac{A'T \sin ATA'}{AT - A'T \cos ATA'}$ , zoodat het, om  $Tg K$  tot in de eerste orde te bekomen, noodig is  $A'E$  en  $AE$ , en daartoe  $A'T$  en hoek  $ATA'$ , tot in de tweede orde te kennen. Tot in die orde is zoo even reeds gebleken  $\angle ATA' = \lambda \sin b$ ; en wat  $A'T$  betreft, merke men op, dat wegens  $AA'$  van de eerste orde, het werkelijke punt  $A'$  van den aardbol een' afstand van slechts de tweede orde tot zijne projectie  $A$  op het vlak van teekening heeft, zoodat de projectie  $A'T$  slechts in de vierde orde van de werkelijke  $A'T$  verschilt, die op hare beurt weder slechts een verschil van de derde orde heeft met de overmaat van  $AT$  boven het breedteverschil van  $A$  en  $A'$ ; dit breedteverschil voorstellende door de enkele letter  $\Delta = b' - b$  (ter bekorting in plaats van de notatie  $\Delta b$  bij den Heer JANSE), is alzoo tot in de tweede orde nauwkeurig  $A'T = \cot b - \Delta$ . En hiermede wordt dan

$$\begin{aligned} Tg K &= \frac{(\cot b - \Delta) \cdot \lambda \sin b}{\cot b - (\cot b - \Delta) \left(1 - \frac{\lambda^2 \sin^2 b}{2}\right)} = \frac{\lambda (\cos b - \Delta \sin b)}{\Delta + \frac{\lambda^2 \sin b \cdot \cos b}{2}} = \\ &= \frac{\lambda \cos b}{\Delta} - \lambda \sin b - \frac{\lambda^3 \sin b \cdot \cos^2 b}{2 \Delta^2}, \end{aligned}$$

waarbij nog op te merken valt, vooreerst, dat hier de teller  $A'E = \lambda (\cos b - \Delta \sin b) = \lambda \cos(b + \Delta)$  ook had kunnen worden voorzien, omdat de loodlijn  $A'E$  volstrekt gelijk is aan den afstand van het punt  $A'$  op den bol tot het meridiaanvlak  $ATQ$ , welke afstand slechts in de derde orde verschilt van den parallelboog  $\lambda \cos(b + \Delta)$  van  $A'$ ; ten tweede, dat evenzoo de noemer  $AE$  gelijk gevonden is aan de som der beide segmenten  $\Delta$  en  $\frac{\{\lambda \cos(b + \Delta)\}^2}{2(\cot b - \Delta)}$ , of tot in de tweede orde  $\frac{(\lambda \cos b)^2}{2 \cot b}$ , waarin  $AE$  door een uit  $T$  met den straal  $TA'$  beschreven cirkelboog zou worden ingedeeld; ten derde, dat hier

en in het vervolg de toevoeging van de vereischte en later waar noodig gemakkelijk te herstellen machten van  $\sin 1'$  bij de verschillende termen (om als  $\lambda$  en  $\Delta$  in minuten gegeven zijn alles in deelen van den straal uit te drukken) kortheidshalve wordt achterwege gelaten.

Thans overgaande tot de berekening van den koershoek  $TAD = K'$  van de loxodroom, brengen wij daartoe den meridiaan PBCF aan, die het lengteverschil  $\lambda$  midden doordeelt, en waarvoor om de vroeger voor A'T uiteengezette reden de deellijn TBCF van hoek  $ATA' = \lambda \sin b$  als projectie der raaklijn, zoowel in het snijpunt B met den grooten cirkel, als in het snijpunt C met de loxodroom, mag worden opgevat; terwijl, als F het snijpunt met de raaklijn AD voorstelt, de drie punten B, C en F, die onderling slechts afstanden van de tweede orde hebben, ieder tot in de eerste orde geacht mogen worden de gemiddelde geographische breedte  $\frac{1}{2}(b+b') = b + \frac{\Delta}{2}$  van A en A' te bezitten (zie hieromtrent later nadere bijzonderheden). Laat men nu uit F de loodlijnen FG en FG' op AT en A'T neder, die dus niet alleen zelve gelijk zijn, maar ook  $TG = TG'$ , en als men nog FH || DA' trekt, bovendien  $AG = G'H$  geven, dan heeft men  $TgK' = \frac{FG}{AG}$ , waarin weder teller en noemer ieder tot in de tweede orde nauwkeurig in rekening gebracht moeten worden. Daartoe is vooreerst, met hetzelfde recht als zoo even voor A'E geschied is, de teller FG als de parallelboog  $\frac{\lambda}{2} \cos \left(b + \frac{\Delta}{2}\right)$  te beschouwen, waarin namelijk, omdat de middelpuntshoek  $\frac{\lambda}{2}$  reeds van de eerste orde is, de straal  $\cos \left(b + \frac{\Delta}{2}\right)$  ook tot in de eerste orde mag volstaan; terwijl ten andere, — uithoofde het verschil der raaklijnen AD en A'D en dus ook de afstand DF van de tweede orde is, alsmede de hoek HFa van de eerste, en dus de afstand A'H van de derde orde, zoodat deze laatste tegenover A'G' bij de berekening van AG mag worden verwaarloosd, — de noemer  $AG = G'H = A'G' = \frac{1}{2}(AG + A'G') = \frac{1}{2}\{(AT - TG) + (TG' - A'T)\} = \frac{1}{2}(AT - A'T) = \frac{\Delta}{2}$  mag genomen worden. En men verkrijgt alzoo door deze meetkundige beschouwing de benaderde formule  $TgK' = \frac{\lambda \cos \left(b + \frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta}$ , zijnde

dezelfde die o. a. bij D. J. BROUWER, *Theoretische en praktische zeevaartkunde*, 1<sup>e</sup> Deel, 1864, blz. 62, als de onmiddellijk aan (IX) voorafgaande formule door berekening gevonden is, en die bij ontwikkeling tot in de eerste orde nauwkeurig geeft

$$Tg K' = \frac{\lambda \cos b}{\Delta} - \frac{\lambda \sin b}{2}.$$

3. Deze laatste formule stemt ook overeen met (9) van den Heer JANSE; niet alzo de boven voor  $Tg K$  gevondene met (6) van den Heer JANSE. Die formule (6) is dan ook m. i. tot in de eerste orde niet de juiste; en dat zij niettemin in verband met (9) tot de juiste formule (10) voor het koersverschil geleid heeft, is alleen te danken aan eene bij de afleiding van (10) begane verrekening van zoodanigen aard, dat daardoor juist weder de fout in (6) wordt opgeheven. Bovendien hebben evenzeer bij de afleiding van de juiste formule (9) zelve twee misrekeningen plaats gehad, die ook elkanders invloed op de uitkomst ophieven; en is o. a. de formule (7), waar  $\cos\left(b + \frac{\Delta}{2}\right)$  in den noemer in plaats van zooals boven en bij BROUWER in den teller voorkomt, niet geldig. Ik zal de vrijheid nemen, dit een en ander nader toe te lichten.

Vooreerst, wat (6) betreft, valt op te merken, dat het niet aangaat zich bij de uitvoering der in de onmiddellijk voorafgaande formule aangeduide deeling te bepalen, zooals aldaar gezegd wordt, tot de twee eerste termen; daar toch het al of niet in rekening houden van termen beheerscht wordt door de vraag, niet of in hunne uitdrukking de eerste machten der kleine grootheden  $\lambda$  en  $\Delta$  voorkomen, maar of zij zelve werkelijk van de eerste orde zijn; men dient dan ook bij die deeling, in verband met de omstandigheid, dat alleen de eerste term van den noemer van de eerste orde is, maar de derde even goed als de tweede term slechts tot de tweede orde opklimt en dus tegelijk met dezen tweeden term behouden moet worden, ook in het quotient de drie eerste termen aan te houden; zoodat dan werkelijk de boven voor  $Tg K$  gevonden waarde komt, waarvan de laatste term, al hangt hij af van  $\lambda^3$  en van  $\Delta^3$ , toch op zich zelf, evenals de tweede term, slechts van de eerste orde is. Het tweede lid van (6) alzo met dezen derden term —  $\frac{\lambda^3 \sin b \cdot \cos^2 b}{2 \Delta^3}$  aangevuld zijnde, geeft

de substitutie daarvan in de formule (5):  $K'' = \frac{Tg K' - Tg K}{1 + Tg K' \cdot Tg K} =$

$$= \frac{\frac{\lambda \sin b}{2} + \frac{\lambda^3 \sin b \cdot \cos^3 b}{2 \Delta^2}}{1 + \frac{\lambda^3 \cos^3 b}{\Delta^2}} \text{ in plaats van de aan (10) voorafgaande}$$

formule; en alleen dan ook tengevolge van het in rekening brengen in teller zoowel als in noemer van de twee hier neêrgeschreven termen van dezelfde orde gaat nu de deeling tot in de eerste orde juist op en geeft naar behooren  $K'' = \frac{\lambda}{2} \sin b$ ; terwijl het daarentegen, indien de door den Heer JANSE aangewezen deeling de juiste was, bij de uitvoering daarvan weder niet geoorloofd zou wezen den tweeden term in den noemer tegen den eersten weg te laten, en het quotient dan ook nog een' bijkomenden term  $-\frac{\lambda^3 \sin b \cdot \cos^3 b}{2 \Delta^2}$  van de eerste orde zou bevatten.

Thans over de afleiding van formule (9). Daargelaten dat de in de 4<sup>e</sup>, 2<sup>e</sup> en 1<sup>e</sup> regels v. o. van blz. 95 en in den 1<sup>en</sup> regel van blz. 96 voorkomende coëfficiënt  $\frac{1}{2}$  overal moet worden wegge-  
 laten, dat de 2<sup>e</sup> regel van blz. 96 zou moeten worden gelezen  $= 2 \cos(b + \frac{1}{2} \Delta b) \cdot \sin \frac{1}{2} \Delta b + \dots$  en dat, dewijl in de aan (8) onmiddellijk voorafgaande formule de laatste term in  $(\Delta b)^2$  is opgenomen, ook in den eersten term van het tweede lid aldaar  $\frac{1}{\cos \frac{1}{2} \Delta b}$

niet  $= 1$ , maar  $= 1 + \frac{1}{2} (\Delta b)^2 \sin^2 \frac{1}{2}$  had moeten genomen worden — is gewichtiger bedenking te maken tegen het buiten rekening laten van den tweeden en van alle volgende termen in evenge-  
 noemden tweeden regel van blz. 96, hetgeen slechts dan geoorloofd zou zijn, als niet alleen  $\Delta b$ , maar  $b$  zelf en dan ook  $b'$  kleine groot-  
 heden waren; in welk geval aan den voet van blz. 95 de beide reeksen in  $b'$  en in  $b$  tot hare eerste termen  $\sin b'$  en  $\sin b$  zouden mogen worden afgekort, terwijl daarentegen thans alle hoogere ver-  
 schillen  $\sin^2 b' - \sin^2 b$  even goed als het eerste verschil  $\sin b' - \sin b$  tot de eerste orde van grootte blijven behooren, en dus geenszins verwaarloosd mogen worden. Door de hier begane misrekening ten aanzien van den noemer  $\Delta \text{ vgb.}$  van (3) laat zich dan ook het bo-  
 ven reeds opgemerkte foutieve van de formule (7) verklaren. En dat desniettemin daaruit de behoorlijke formule (9) te voorschijn is geko-  
 men, is weder te danken of te wijten aan de omstandigheid dat, terwijl  
 na de aan (8) voorafgegane uitrekening der waarde van  $\frac{1}{\cos(b + \frac{1}{2} \Delta b)}$



deze waarde, gesteld dat (7) juist was, met  $\frac{\lambda}{\Delta b}$  had moeten vermenigvuldigd worden om  $Tg K'$  op te leveren, daarentegen in werkelijkheid in (8) diezelfde waarde gebruikt is als deeler op  $\frac{\lambda}{\Delta b}$ . Ook hier dus is alleen door compensatie van twee fouten de goede uitkomst verkregen.

Ten slotte moge nog op enkele misstellingen of drukfouten van minder belang in het opstel van den Heer JANSE gewezen worden.

De vijfde opgaaf in de laatste kolom der Tabel van blz. 93 moet, in verband met de overige opgaven in die kolom en in de voorgaande breedte-kolommen, en ook in verband met de volgende alinea, waarschijnlijk luiden  $51^{\circ}42'$  in plaats van  $52^{\circ}42'$ .

Op blz. 94, regel 3 v. o., moet de laatste term zijn  $Tg^2 b \cdot Tg^3 \Delta b$ .

Blz. 96, regel 7 v. o., staat  $b$ , lees  $\Delta b$ .

Blz. 97, laatste regel, zal 1224 tot 1203 vervangen moeten worden door 1225 tot 1243.

Eindelijk de opmerking, dat het bewijs op blz. 99—101 voor de gelijkheid der hoeken, die op den bol en op de kaart van MERCATOR gevormd worden tusschen den grooten cirkel en den meridiaan, overbodig zou kunnen geacht worden, indien men als bekend wil aannemen, zooals bijv. bij BROUWER, blz. 122, sub  $d$  geschiedt, dat de voor deze kaart gebezigde projectie-methode eene zoogenaamde conforme is, en dat dus alle hoeken onveranderd in grootte van den bol op de kaart overgaan. Trouwens, indien men er, zooals de Heer JANSE, van uitgaat, dat de hoek van de loxodroom met den meridiaan onveranderd blijft, kan het niet missen, of door het aanleggen van rakende loxodromen in het hoekpunt komt men tot hetzelfde besluit ten aanzien van hoeken, door willekeurige krommen op den bol gevormd.

4. Uit de gevonden formule  $K'' = \frac{\lambda}{2} \sin b$  voor het koersverschil volgen ook onmiddellijk formules voor twee andere grootheden, die eigenaardig het onderscheid tusschen den grooten cirkel en de loxodroom aanwijzen, namelijk hun bij benadering in het midden te meten grootsten onderlingen afstand of pijl BC, en het verschil der afstanden van de eindpunten A en A' volgens beide krommen ABA' en ACA' zelve. Om deze twee grootheden te berekenen, kan men gebruik maken van de voor een' kleinen boog eener willekeurige kromme geldende benaderingsformulen, komende door zich dezen

boog door dien van den kromtecirkel vervangen te denken. Stelt namelijk  $s$  de lengte van den boog,  $\phi$  zijn' hoek met de koorde, en dus  $\frac{s}{2\phi}$  den kromtestraal voor; dan is de pijl gelijk  $\frac{s}{2\phi}(1 - \cos\phi) = \frac{s}{2\phi} \cdot \frac{\phi^2}{2} = \frac{s\phi}{4}$ ; en de overmaat van den boog boven de koorde gelijk  $2 \cdot \frac{s}{2\phi}(\phi - \sin\phi) = \frac{s}{\phi} \cdot \frac{\phi^3}{6} = \frac{s\phi^2}{6}$ , in welke uitdrukkingen van de tweede en de derde orde nu  $s$  naar willekeur den boog zelf of de koorde kan beteekenen.

Bij de toepassing op het tegenwoordige geval, waar men twee krommen onderling te vergelijken heeft, schijnt het dienstig, ten einde ééne daarvan als het ware tot eene rechte lijn te herleiden, gebruik te maken van den langs den groote-cirkelboog  $s = ABA'$  om den aardbol beschreven omhullingscilinder, waarop ook binnen den beoogden graad van benadering de loxodroom  $s' = ACA'$  mag geacht worden te liggen, en tot de ontwikkeling van dezen cilinder over te gaan; waarbij dan, terwijl de afstanden  $s$  en  $s'$ , hunne hoeken in  $A$  en  $A'$  en de pijl  $BC$  onveranderd blijven,  $s$  koorde wordt van den ontwikkelden boog  $s'$ . Men heeft dan ook slechts, om in de eerste plaats den loodrechten onderlingen afstand van grooten cirkel en loxodroom te vinden, in de zoo even voor den pijl gevonden formule aan de algemeene  $s$  de beteekenis te geven hetzij van de hier genoemde  $s$  of  $s'$ , en  $\phi = K'' = \frac{\lambda}{2} \sin b$  te substitueeren;

waardoor men verkrijgt  $\frac{s\lambda}{8} \sin b$ . Is het daarentegen te doen om dien afstand  $BC$ , gemeten langs den middelmeridiaan, dan dient deze waarde  $\frac{s\lambda}{8} \sin b$  nog door  $\sin ABC$ , dat is benaderd door  $\sin TAA' =$

$$= \frac{A'E}{AA'} = \frac{\lambda \cos b}{s}, \text{ gedeeld te worden om te verkrijgen } BC = \frac{s^2}{8} \text{ } Tgb,$$

eene uitkomst trouwens, die, wat dit betreft, ook wel zonder den omhullingscilinder had kunnen bekomen worden, door namelijk, behoudens wederom gemakkelijk te beredeneren geoorloofde benaderingen, in het vlak van teekening zelf partij te trekken van den reeds boven door de punten  $T, A, D$  (dus ook nagenoeg  $F$ ) en  $A'$  gelegden cir-

$$\text{kel, gevende evenzeer } BC = \frac{BF}{2} = \frac{AB \cdot BA'}{2BT} = \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2}{2 \cot b} = \frac{s^2}{8} \text{ } Tgb.$$

Wat betreft de overmaat van den afstand  $s' = ACA'$  boven  $s = ABA'$  komt, door in de gevonden algemeene formule  $\frac{s\phi^2}{6}$  de-

zelfde substitutie  $\phi = K'' = \frac{\lambda}{2} \sin b$  te verrichten,  $s' - s = \frac{s\lambda^2}{24} \sin^2 b$ .

Ook deze uitkomst zou men desverkiezende zonder behulp van den omhullingscilinder kunnen afleiden, bijv. door eene beschouwing als hier volgt. Vergelijkt men den groote-cirkelboog en de loxodroom ieder voor zich met de koorde, die de op den bol zelf liggende punten A en A' verbindt, dan geeft evengenoemde formule voor hunne overmaten boven deze koorde een zesde van het product van onverschillig welk der drie genoemde afstanden met het vierkant telkens van den hoek in A, begrepen tusschen den grooten cirkel en de koorde, of tusschen de loxodroom en de koorde; en onderlinge aftrekking van deze twee overmaten doet dus voor de overmaat van loxodroom boven grooten cirkel kennen een zesde van het product van denzelfden afstand met de overmaat van laatstbedoeld boven het voorgaande vierkant. Nu zijn de beide genoemde hoeken evenals de onderlinge hoek der twee beschouwde krommen kleine hoeken, en daar zij voorkomen als de vlakke hoeken van een' drievlakkigen hoek, mag dus de bolvormige driehoek, die tot maat van dezen drievlakkigen hoek dient, beschouwd worden als een vlakke driehoek, die, gelet op den loodrechten stand van het vlak van den grooten cirkel op het raakvlak in A, nog daarenboven rechthoekig is in het op de raaklijn aan den grooten cirkel liggende hoekpunt. Van dáár dat in dezen driehoek, wiens hypotenuse en beide rechthoekszijden de hoeken meten tusschen loxodroom en koorde, tusschen grooten cirkel en koorde, en tusschen loxodroom en grooten cirkel, de boven verkregen overmaat van het vierkant van den eersten boven dat van den tweeden dezer hoeken gelijk blijkt aan het vierkant van den derden hoek, dat is van  $K''$ ; en ook langs dezen weg komt men dus tot de formule  $s' - s = \frac{sK''^2}{6} = \frac{s\lambda^2}{24} \sin^2 b$  terug.

5. Wil men den pijl BC nauwkeuriger dan tot in de tweede orde berekenen, dan kan men hem beschouwen als de overmaat der breedte  $\beta$  van het punt B, waar de groote cirkel, boven de breedte  $\beta'$  van het punt C, waar de loxodroom door den middelmeridiaan PBC gesneden wordt; en eerst deze beide breedten ieder afzonderlijk bepalen door formules, die ook zouden gelden in het geval van willekeurig lengteverschil  $\lambda$  en breedteverschil  $\Delta$  tusschen de punten A en A'.

Daartoe heeft men vooreerst, wat  $\beta$  betreft, door gelijkstelling der beide waarden, die men voor  $\text{Cot } K$  uit de bolvormige driehoeken PAB en PAA' afleest,

$$\frac{\text{Cos } b \cdot \text{Tg } \beta - \text{Sin } b \cdot \text{Cos } \frac{\lambda}{2}}{\text{Sin } \frac{\lambda}{2}} = \frac{\text{Cos } b \cdot \text{Tg } b' - \text{Sin } b \cdot \text{Cos } \lambda}{\text{Sin } \lambda},$$

$$\text{gevende } \text{Tg } \beta = \frac{\text{Tg } b \cdot \left( 2 \text{Cos}^2 \frac{\lambda}{2} - \text{Cos } \lambda \right) + \text{Tg } b'}{2 \text{Cos } \frac{\lambda}{2}} = \frac{\text{Tg } b + \text{Tg } b'}{2 \text{Cos } \frac{\lambda}{2}},$$

dat is eene formule, die men desverkiezende ook door meetkundige beschouwing kan verkrijgen; namelijk door zich voor te stellen, dat de bolvormige driehoek PAA' met den deelboog PB van uit het middelpunt der aarde geprojecteerd wordt op het raakvlak in de pool P, als wanneer de projectie van dezen deelboog, dat is  $\text{Cot } \beta$ , blijkt voor te komen als deellijn van den hoek  $\lambda$  in den geprojecteerden rechthoekigen driehoek, die  $\text{Cot } b$  en  $\text{Cot } b'$  tot zijden om dien hoek heeft; zoodat men, — door neder te schrijven, dat de som van de inhouden der beide driehoeken, waarin deze driehoek door genoemde deellijn wordt ingedeeld, gelijk is aan den inhoud van den driehoek zelf, — dadelijk heeft

$$\frac{1}{2} (\text{Cot } b + \text{Cot } b') \text{Cot } \beta \cdot \text{Sin } \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} \text{Cot } b \cdot \text{Cot } b' \cdot \text{Sin } \lambda \text{ en dus ook}$$

$$\text{Tg } \beta = \frac{\text{Tg } b + \text{Tg } b'}{2 \text{Cos } \frac{\lambda}{2}}, \text{ als zoo even.}$$

Wat betreft de breedte  $\beta'$  van het punt C der loxodroom, deze is evenzeer af te leiden uit de gelijkstelling der beide waarden, die voor de cotangens van den koershoek  $K'$  hier kromme gevonden worden uit hare bogen AC en ACA', namelijk

$$\frac{\text{Nep log Tg } \left( 45^\circ + \frac{\beta'}{2} \right) - \text{Nep log Tg } \left( 45^\circ + \frac{b}{2} \right)}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\text{Nep log Tg } \left( 45^\circ + \frac{b'}{2} \right) - \text{Nep log Tg } \left( 45^\circ + \frac{b}{2} \right)}{\lambda},$$

gevende dus

$$2 \operatorname{Nep} \log \operatorname{Tg} \left( 45^\circ + \frac{\beta'}{2} \right) = \operatorname{Nep} \log \operatorname{Tg} \left( 45^\circ + \frac{b}{2} \right) + \operatorname{Nep} \log \operatorname{Tg} \left( 45^\circ + \frac{b'}{2} \right),$$

$$\text{of} \quad \operatorname{Tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\beta'}{2} \right) = \operatorname{Tg} \left( 45^\circ + \frac{b}{2} \right) \cdot \operatorname{Tg} \left( 45^\circ + \frac{b'}{2} \right),$$

$$\text{of} \quad \left( \frac{1 + \operatorname{Tg} \frac{\beta'}{2}}{1 - \operatorname{Tg} \frac{\beta'}{2}} \right)^2 = \frac{1 + \operatorname{Tg} \frac{b}{2}}{1 - \operatorname{Tg} \frac{b}{2}} \cdot \frac{1 + \operatorname{Tg} \frac{b'}{2}}{1 - \operatorname{Tg} \frac{b'}{2}};$$

dat is, door wederzijds het gelijkteken de eenheid beurtelings af te trekken en op te tellen, en daarna de quotienten dezer uitkomsten gelijk te stellen,

$$\frac{2 \operatorname{Tg} \frac{\beta'}{2}}{1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{\beta'}{2}} = \frac{\operatorname{Tg} \frac{b}{2} + \operatorname{Tg} \frac{b'}{2}}{1 + \operatorname{Tg} \frac{b}{2} \cdot \operatorname{Tg} \frac{b'}{2}}, \text{ of eindelijk } \sin \beta' = \frac{\sin \frac{1}{2}(b + b')}{\cos \frac{1}{2}(b - b')}.$$

Gaat men nu, na deze nauwkeurige formules voor  $\operatorname{Tg} \beta$  en  $\sin \beta'$  opgemaakt te hebben, weder over tot de onderstelling, dat  $\lambda$  en  $\Delta$  geringe waarden hebben, dan vindt men, invoerende de notatiën  $\beta = b + \delta$  en  $\beta' = b + \delta'$ , de volgende benaderingsformules, namelijk vooreerst:

$$\operatorname{Tg}(b + \delta) = \frac{\operatorname{Tg} b + \operatorname{Tg}(b + \Delta)}{2 \cos \frac{\lambda}{2}}, \text{ dat is, door zich bij de ontwikke-}$$

ling volgens de reeks van TAYLOR te bepalen tot de tweede orde van grootte,

$$\begin{aligned} \operatorname{Tg} b + \frac{\delta}{\cos^2 b} + \delta^2 \frac{\sin b}{\cos^3 b} &= \frac{2 \operatorname{Tg} b + \frac{\Delta}{\cos^2 b} + \Delta^2 \frac{\sin b}{\cos^3 b}}{2 \left( 1 - \frac{\lambda^2}{8} \right)} = \\ &= \operatorname{Tg} b + \frac{\Delta}{2 \cos^2 b} + \Delta^2 \frac{\sin b}{2 \cos^3 b} + \frac{\lambda^2}{8} \operatorname{Tg} b, \end{aligned}$$

waaruit  $\delta = \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{2} \operatorname{Tg} b + \frac{\lambda^2}{8} \sin b \cdot \cos b - \delta^2 \operatorname{Tg} b$ ; en dus door hier in den laatsten term met voldoende benadering weder  $\delta = \frac{\Delta}{2}$  te substitueeren,  $\beta = b + \delta = b + \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{4} \operatorname{Tg} b + \frac{\lambda^2}{8} \sin b \cdot \cos b$ ; en ten andere:

$$\begin{aligned} \sin(b + \delta') &= \frac{\sin\left(b + \frac{\Delta}{2}\right)}{\cos \frac{\Delta}{2}}, \text{ dat is } \sin b + \delta' \cos b - \frac{\delta'^2}{2} \sin b = \\ &= \sin b + \frac{\Delta}{2} \cos b, \text{ waaruit } \delta' = \frac{\Delta}{2} + \frac{\delta'^2}{2} \operatorname{Tg} b, \text{ en dus op dezelfde} \\ &\text{wijze als zoo even } \beta' = b + \delta' = b + \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{8} \operatorname{Tg} b. \end{aligned}$$

Ook deze beide formules, — die door aftrekking geven  $BC = \beta - \beta' =$   
 $= \delta - \delta' = \frac{\Delta^2}{8} \operatorname{Tg} b + \frac{\lambda^2}{8} \sin b \cdot \cos b$ , dat is, dewijl men bij eerste bena-  
dering heeft  $s^2 = AA'^2 = AE^2 + A'E^2 = \Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b$ , naar be-  
hooren nogmaals de reeds boven tot in de tweede orde gevonden waarde  
 $BC = \frac{s^2}{8} \operatorname{Tg} b$ , — hadden weder ieder voor zich meetkundig bewezen  
kunnen worden. Daartoe geeft namelijk de figuur vooreerst, gebruik  
makende van eene bekende formule voor de hoekdeellijn van een  
driehoek,

$$\begin{aligned} \delta &= \beta - b = TA - TB = TA - \sqrt{(TA \cdot TA' - BA \cdot BA')} = \\ &= \cot b - \sqrt{\cot b \cdot (\cot b - \Delta) - \frac{1}{4}(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)} = \\ &= \cot b - \cot b \cdot \left\{ 1 - \left( \Delta \operatorname{Tg} b + \frac{\Delta^2}{4} \operatorname{Tg}^2 b + \frac{\lambda^2}{4} \sin^2 b \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \cot b - \cot b \cdot \left\{ 1 - \left( \frac{\Delta}{2} \operatorname{Tg} b + \frac{\Delta^2}{8} \operatorname{Tg}^2 b + \frac{\lambda^2}{8} \sin^2 b \right) - \frac{\Delta^2}{8} \operatorname{Tg}^2 b \right\} = \\ &= \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{4} \operatorname{Tg} b + \frac{\lambda^2}{8} \sin b \cdot \cos b; \end{aligned}$$

en ten andere, gelet dat in de logarithmische spiraal de voerstraal  
TC middenevenredig is tusschen TA en TA',

$$\begin{aligned} \delta' &= \beta' - b = TA - TC = TA - \sqrt{TA \cdot TA'} = \cot b - \sqrt{\cot b \cdot (\cot b - \Delta)} = \\ &= \cot b - \cot b \cdot (1 - \Delta \operatorname{Tg} b)^{\frac{1}{2}} = \cot b - \cot b \cdot \left( 1 - \frac{\Delta}{2} \operatorname{Tg} b - \frac{\Delta^2}{8} \operatorname{Tg}^2 b \right) = \\ &= \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{8} \operatorname{Tg} b, \end{aligned}$$

zijnde beide uitkomsten werkelijk dezelfde als zoo even door bereke-  
ning gevonden.

6. Wil men evenzeer de koershoeken  $K$  en  $K'$  en hun verschil  $K''$ ,  
in plaats van zooals boven in de eerste orde, ook tot in de tweede  
orde van grootte nauwkeurig kennen, dan schijnt het eenvoudiger,  
ook voor dit doel van de zoo even reeds gebezigde formules voor

de cotangenten dan van die voor de tangenten dier hoeken gebruik te maken.

In de eerste plaats heeft men dan  $\text{Cot } K = \frac{\text{Cos } b \cdot \text{Tg}(b + \Delta) - \text{Sin } b \cdot \text{Cos } \lambda}{\text{Sin } \lambda}$ ,

waarin nu teller en noemer tot in de derde orde dienen ontwikkeld te worden; dit doende, voor zoover den teller betreft door middel van de reeks van TAYLOR, komt

$$\begin{aligned} \text{Cot } K &= \frac{\text{Cos } b \cdot \left\{ \text{Tg } b + \frac{\Delta}{\text{Cos}^2 b} + \Delta^2 \frac{\text{Sin } b}{\text{Cos}^3 b} + \Delta^3 \frac{1 + 2 \text{Sin}^2 b}{3 \text{Cos}^4 b} \right\} - \text{Sin } b \cdot \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2} \right)}{\lambda - \frac{\lambda^3}{6}} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\Delta}{\text{Cos } b} + \Delta^2 \frac{\text{Sin } b}{\text{Cos}^2 b} + \frac{\lambda^2}{2} \text{Sin } b + \Delta^3 \frac{1 + 2 \text{Sin}^2 b}{3 \text{Cos}^3 b} + \frac{\Delta \lambda^2}{6 \text{Cos } b} \right\}. \end{aligned}$$

En in de tweede plaats is

$$\text{Cot } K' = \frac{\text{Nep log Tg} \left( 45^\circ + \frac{b + \Delta}{2} \right) - \text{Nep log Tg} \left( 45^\circ + \frac{b}{2} \right)}{\lambda},$$

gevende evenzeer volgens TAYLOR, omdat de eerste, tweede en derde differentiaalquotienten van de functie  $\text{Nep log Tg} \left( 45^\circ + \frac{b}{2} \right)$  zijn

$$\frac{1}{\text{Cos } b}, \quad \frac{\text{Sin } b}{\text{Cos}^2 b} \quad \text{en} \quad \frac{1 + \text{Sin}^2 b}{\text{Cos}^3 b},$$

$$\text{Cot } K' = \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\Delta}{\text{Cos } b} + \Delta^2 \frac{\text{Sin } b}{2 \text{Cos}^2 b} + \Delta^3 \frac{1 + \text{Sin}^2 b}{6 \text{Cos}^3 b} \right\},$$

dat is dezelfde formule, die ook bij BROUWER, blz. 61 onderaan, voorkomt.

Substitutie van de beide gevonden waarden geeft wijders tot in de tweede orde

$$\begin{aligned} K'' &= \frac{1}{\text{Cot}(K' - K)} = \frac{\text{Cot } K - \text{Cot } K'}{1 + \text{Cot } K \cdot \text{Cot } K'} = \\ &= \lambda \frac{\Delta^2 \frac{\text{Sin } b}{2 \text{Cos}^3 b} + \frac{\lambda^2}{2} \text{Sin } b + \Delta^3 \frac{1 + 3 \text{Sin}^2 b}{6 \text{Cos}^3 b} + \frac{\Delta \lambda^2}{6 \text{Cos } b}}{\lambda^2 + \frac{\Delta^2}{\text{Cos}^2 b} + \frac{\Delta}{\text{Cos } b} \left( \Delta^2 \frac{3 \text{Sin } b}{2 \text{Cos}^3 b} + \frac{\lambda^2}{2} \text{Sin } b \right)}, \end{aligned}$$

hetgeen bij ontwikkeling onder één der drie volgende vormen kan geschreven worden

$$\begin{aligned} K'' &= \frac{\lambda}{2} \left\{ \text{Sin } b + \Delta \frac{3 \text{Cos}^2 b - 1}{6 \text{Cos } b} \right\} = \frac{\lambda}{2} \left\{ \text{Sin} \left( b + \frac{\Delta}{2} \right) - \frac{\Delta}{6 \text{Cos } b} \right\} = \\ &= \frac{\lambda}{6 \text{Cos}^2 b} \left\{ \text{Sin } b + (3 \text{Cos}^2 b - 1) \text{Sin} \left( b + \frac{\Delta}{2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

die o. a. leeren, dat — als men zich bepaalt tot de gevallen van geen te groot lengteverschil  $\lambda$ , omdat het anders niet zou hebben aangegaan in teller en noemer van  $\text{Cot } K$  voor  $\text{Cos } \lambda$  en  $\text{Sin } \lambda$  te nemen  $1 - \frac{\lambda^2}{2}$  en  $\lambda - \frac{\lambda^3}{6}$ , — voor positief breedteverschil  $\Delta$  en naar-

mate  $3 \text{Cos}^2 b - 1 \geq 0$  is, en dus  $\text{Cos } b \geq \frac{1}{3} \sqrt{3}$ , de afgekorte formule

$K'' = \frac{\lambda}{2} \text{Sin } b$  eene te kleine, de juiste (namelijk tot in de tweede

orde), of eene te groote waarde geeft; alsook dat, wat de door den Heer JANSE op blz. 98 ter sprake gebrachte vervanging van den sinus der breedte van afvaart  $b$  door den sinus der middelbreedte

$b + \frac{\Delta}{2}$  in deze afgekorte formule betreft, daardoor slechts dán het voordeel van een geringer bedrag der volstreckte fout bereikt wordt, wanneer  $3 \text{Cos}^2 b - 1 > 1$  of  $\text{Cos } b > \frac{1}{3} \sqrt{3}$  is.

Uit den tweeden voor  $K''$  gevonden vorm laat zich nog dadelijk het koers- of azimuthverschil  $K''' = \text{AA}'\text{D}$  tusschen grooten cirkel en loxodroom bij het punt van aankomst  $A'$  afschrijven, door namelijk  $b$  te vervangen door  $b + \Delta$ ,  $\Delta$  door  $-\Delta$ ,  $\lambda$  door  $-\lambda$  en  $K''$  door  $-K'''$ , waardoor komt  $K''' = \frac{\lambda}{2} \left\{ \text{Sin} \left( b + \frac{\Delta}{2} \right) + \frac{\Delta}{6 \text{Cos} (b + \Delta)} \right\}$ . Men heeft dus tot in de tweede orde nauwkeurig  $K'' + K''' = \lambda \text{Sin} \left( b + \frac{\Delta}{2} \right) = \frac{\lambda}{2} \{ \text{Sin } b + \text{Sin} (b + \Delta) \}$  en  $K''' - K'' = \frac{\Delta \lambda}{6 \text{Cos } b}$ .

In het bijzondere geval van  $b' = b$  of  $\Delta = 0$ , als wanneer de loxodroom met de parallel samenvalt, komt tot in de tweede orde  $K'' = K''' = \frac{\lambda}{2} \text{Sin } b$ , zooals ook rechtstreeks volgt uit de nauwkeurige formule in den alsdan in C rechthoekigen bolvormigen driehoek P A C, namelijk  $\text{Cos} (90^\circ - b) = \text{Cot} (90^\circ - K'') \cdot \text{Cot} \frac{\lambda}{2}$  of  $\text{Tg } K'' = \text{Tg} \frac{\lambda}{2} \cdot \text{Sin } b$ .

7. Ten slotte moge hier nog tot in de derde orde de berekening van de afstanden  $\text{ABA}' = s$  volgens den grooten cirkel en  $\text{ACA}' = s'$  volgens de loxodroom plaats hebben, uitgedrukt in het gegeven lengte- en breedteverschil  $\lambda$  en  $\Delta$ , en waartoe althans voor  $s'$  de voorafgaande kennis van den bovengevonden koershoek  $K'$  tot in de tweede orde noodig zal blijken.



De afstand  $s$  komt te voorschijn door toepassing van de hoofdformule der bolvormige driehoeksmeting op  $\Delta PAA'$ , welke toepassing geeft

$$\begin{aligned}\cos s &= \sin b \cdot \sin(b + \Delta) + \cos b \cdot \cos(b + \Delta) \cdot \cos \lambda = \\ &= \cos((b + \Delta) - b) - \cos b \cdot \cos(b + \Delta) \cdot (1 - \cos \lambda),\end{aligned}$$

en dus tot in den verlangden graad van benadering

$$1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{24} = \left(1 - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^4}{24}\right) - \left\{ \cos^2 b \cdot \left(1 - \frac{\Delta^2}{2}\right) - \Delta \sin b \cdot \cos b \right\} \left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{24}\right),$$

waaruit

$$s = \left\{ (\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b) - \left( \Delta \lambda^2 \sin b \cdot \cos b + \frac{\Delta^4 + 6 \Delta^2 \lambda^2 \cos^2 b + \lambda^4 \cos^2 b - s^4}{12} \right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

dat is, door de drie eerste termen van de ontwikkeling volgens het binomium in rekening te brengen,

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)} - \left( \frac{\Delta \lambda^2 \sin b \cdot \cos b}{2 \sqrt{(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} \frac{\Delta^4 + 6 \Delta^2 \lambda^2 \cos^2 b + \lambda^4 \cos^2 b - s^4}{\sqrt{(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)}} \right) - \frac{1}{8} \frac{\Delta^2 \lambda^4 \sin^2 b \cdot \cos^2 b}{(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

of eindelijk, door den laatsten term bijéén te brengen met het tweede gedeelte van den middelsten, nadat met hierin voldoende benadering

$$s^4 = (\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)^2 \text{ gesubstitueerd is,}$$

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)} - \frac{\Delta \lambda^2 \sin b \cdot \cos b}{2 \sqrt{(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)}} - \\ &\quad - \frac{\lambda^2 \cos^2 b \cdot (4 \Delta^4 + 4 \Delta^2 \lambda^2 + \lambda^4 \sin^2 b \cdot \cos^2 b)}{24 (\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

$$\text{Voor den afstand } s' \text{ heeft men } s' = \frac{\Delta}{\cos K'} = \sqrt{\Delta^2 + (\Delta \operatorname{Tg} K')^2},$$

of omdat de omkeering van de boven voor  $\cot K'$  tot in de tweede orde gevonden waarde geeft tot in de derde orde

$$\Delta \operatorname{Tg} K' = \lambda \cos b - \frac{\Delta \lambda}{2} \sin b - \Delta^2 \lambda \frac{1 + \cos^2 b}{12 \cos b},$$

komt

$$s' = \left\{ (\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b) - \left( \Delta \lambda^2 \sin b \cdot \cos b + \frac{\Delta^2 \lambda^2 (4 \cos^2 b - \sin^2 b)}{12} \right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

en dus, door op dezelfde wijze als zoo even volgens het binomium te ontwikkelen,

$$\begin{aligned}s' &= \sqrt{(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)} - \left( \frac{\Delta \lambda^2 \sin b \cdot \cos b}{2 \sqrt{(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)}} + \frac{1}{24} \frac{\Delta^2 \lambda^2 (4 \cos^2 b - \sin^2 b)}{\sqrt{(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)}} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{\Delta^2 \lambda^4 \sin^2 b \cdot \cos^2 b}{(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

of eindelijk, door bijéentrekking weder der termen van de derde orde,

$$s' = \sqrt{(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)} - \frac{\Delta \lambda^2 \sin b \cdot \cos b}{2 \sqrt{(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)}} - \\ - \frac{\Delta^2 \lambda^2 \{ (4 \cos^2 b - \sin^2 b) \Delta^2 + 2 \lambda^2 \cos^2 b \cdot (1 + \cos^2 b) \}}{24 (\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)^{\frac{3}{2}}}.$$

Trekt men nu nog ten overvloede van deze laatste formule de evengevoondene voor  $s$  af, dan verkrijgt men tot uitkomst

$$s' - s = \frac{\lambda^2 \sin^2 b \cdot (\Delta^4 + 2 \Delta^2 \lambda^2 \cos^2 b + \lambda^4 \cos^4 b)}{24 (\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)^{\frac{3}{2}}} = \\ = \frac{\lambda^2 \sin^2 b \cdot \sqrt{(\Delta^2 + \lambda^2 \cos^2 b)}}{24} = \frac{s \lambda^2}{24} \sin^2 b;$$

dat is naar behooren dezelfde waarde van de derde orde, die vroeger langs veel eenvoudiger weg voor de overmaat van de loxodroom boven den groote-cirkelboog is verkregen.

---

# OVER EEN MEETKUNDIG VRAAGSTUK VAN KANSREKENING,

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

1. Wanneer men te doen heeft met eene soort van vraagstukken in het platte vlak, als waartoe bijv. het volgende behoort:

„Hoe groot is de kans, dat eene rechte lijn, die een gegeven cirkel snijdt, bovendien nog een tweeden gegeven cirkel zal snijden”,

— en van welke soort er bijv. verscheidene voorkomen in eenige der laatste deelen van de *Mathematical questions, with their solutions, from the „Educational Times”*, edited by W. J. C. MILLER, — dan behoort men zich in de eerste plaats rekenschap te geven van de wijze of wet, volgens welke alle in het platte vlak te trekken lijnen over het vlak verspreid gedacht worden. Voor zoover de lijnen aan geene andere voorwaarde gebonden zijn dan aan die van in het vlak te liggen, schijnt de natuurlijkste of, zoo men wil, zelfs de noodzakelijke aanname daaromtrent te wezen, dat eensdeels het oneindig aantal door een zelfde willekeurig punt te trekken lijnen onderling gelijke hoeken maken, en dat mitsdien ook anderdeels, als men zich dit punt zelf op oneindigen afstand verwijderd denkt, het oneindig aantal aan eene zelfde willekeurige richting evenwijdige lijnen op onderling gelijke afstanden liggen; zoodat in dezen zin eensdeels alle richtingen rond eenig punt, en anderdeels alle afstanden tot eenig punt, gelijke kansen hebben. Deze aanname ligt dan ook bijv. ten grondslag aan de tweede methode van oplossing, die door Dr. P. H. SCHOUTE voor het genoemde vraagstuk wordt toegepast in *Comptes-rendus de la 9<sup>e</sup> session de l'association française pour l'avancement des*

*sciences*, Reims 1880, (pag. 32—36 van afzonderlijken afdruk), en volgens welke hij, als  $r$  de straal van den eersten,  $R$  die van den tweeden cirkel, en  $a$  de afstand hunner middelpunten is, voor de bedoelde kans vindt:

1°. indien de twee cirkels buiten elkander liggen,

$$\frac{1}{\pi r} \left[ (R+r) \text{Boog Sin } \frac{R+r}{a} - (R-r) \text{Boog Sin } \frac{R-r}{a} + \right. \\ \left. + \sqrt{a^2 - (R+r)^2} - \sqrt{a^2 - (R-r)^2} \right];$$

2°. indien zij elkander snijden,

$$\frac{1}{\pi r} \left[ (R+r) \frac{\pi}{2} - (R-r) \text{Boog Sin } \frac{R-r}{a} - \sqrt{a^2 - (R-r)^2} \right];$$

en 3°. indien de tweede cirkel binnen den eersten ligt,

$$\frac{R}{r}.$$

Dezelfde uitkomsten zijn ook, zooals gemakkelijk is naterekenen, als bijzondere gevallen vervat in de door MORGAN W. CROFTON, *On the theory of local probability, applied to straight lines drawn at random in a plane, etc.* (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for 1868*, Vol. 158, page 181—199) verkregen formules voor de gevraagde kans in het geval van twee willekeurige gesloten convexe vlakke figuren; deze formules zijn namelijk (page 185—186), als  $L$  den omtrek van de eerste figuur,  $l$  dien van de tweede figuur,  $X$  de lengte van een kruiselings of inwendig, en  $Y$  daarentegen die van een uitwendig rondom beide figuren geslagen koord zonder eind voorstelt, achtereenvolgens in de drie evengenoemde gevallen: 1°.  $\frac{X-Y}{L}$ ; 2°.  $\frac{L+l-Y}{L}$ , en 3°.  $\frac{l}{L}$ ; terwijl aldaar boven-

dien kortelijk melding wordt gemaakt van het geval van niet-convexe of ook van niet gesloten figuren.

Ofschoon dus de tweede door den Heer SCHOUTE gevolgde methode voor het opgegeven vraagstuk werkelijk tot uitkomsten in overeenstemming met die van CROFTON voert, neemt dit niet weg, dat men toch, wanneer de eerst gegeven kromme hier niet juist een cirkel was, bij de toepassing van die methode met eenige omzichtigheid te werk zou moeten gaan. Men zou dan namelijk in aanmerking moeten nemen, dat — als (om ons ten deze bijv. tot het laatste der drie genoemde gevallen te bepalen) de onderlinge afstand van de beide door eenigen richtingshoek  $\phi$  bepaalde evenwijdige raaklijnen voor de eerste of uitwendige figuur was  $\beta$ , en voor de tweede of inwen-

dige figuur evenzoo  $\beta'$ , — de te berekenen kans zou worden voorgesteld, niet door  $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\beta'}{\beta} d\phi$ , maar door  $\frac{\int_0^\pi \beta' d\phi}{\int_0^\pi \beta d\phi}$ , twee waarden waarvan in het algemeen alleen de laatste gelijk  $\frac{l}{L}$  is. Immers als voor eenige kromme  $s$  den boog,  $p$  de loodlijn uit de pool op de raaklijn, en  $q$  den afstand van het voetspunt dier loodlijn tot het raakpunt beteekent, overtuigt men zich gemakkelijk uit de figuur, dat tot in de eerste orde  $p d\phi = ds + q - (q + d\phi) = ds - dq$  is; waarvan de integraal tusschen 0 en  $2\pi$  hier voert tot  $\int_0^\pi \beta d\phi = L$  en evenzoo  $\int_0^\pi \beta' d\phi = l$ . En de beide evengenoemde verschillende waarden  $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\beta'}{\beta} d\phi$  en  $\frac{\int_0^\pi \beta' d\phi}{\int_0^\pi \beta d\phi}$  vallen dan ook bij het opgegeven vraagstuk slechts daarom samen, wijl aldaar  $\beta$  standvastig is. Al moge overigens in het algemeen iedere in het vlak beschouwde richting  $\phi$  op zich zelve gelijke kans hebben, ongelijk daarentegen, en wel evenredig aan de overeenkomstige  $\beta$ , zijn de kansen, dat lijnen van verschillende richtingen  $\phi$  als snijlijnen van de eerste figuur voorkomen; en van daar dat, om voor eenige  $\phi$  de werkelijke kans van gelijktijdige snijding der beide figuren uit te drukken, de betrekkelijke kans  $\frac{\beta'}{\beta}$  toch eerst weder met een aan  $\beta$  evenredigen factor zou moeten vermenigvuldigd worden, waardoor men zooals gezegd tot de door CROFTON rechtstreeks bepaalde waarde  $\frac{\int_0^\pi \beta' d\phi}{\int_0^\pi \beta d\phi} = \frac{l}{L}$  der totale kans wordt teruggevoerd.

Behalve zijne zoo even beschouwde tweede methode past de Heer SCHOUTE nog eene eerste methode van berekening op het vraagstuk toe, die namelijk gegrond is op de bepaling van de kans, dat een uit een willekeurig punt van den eerst gegeven cirkel getrokken snijlijn ook den tweeden cirkel zal snijden. Maar — daargelaten dat op pag. 32 onder moet staan  $2QPQ_1$  in plaats van  $QPQ_1$ , en dat dientengevolge de integralen in 't overal verdubbeld moeten worden — is aan het slot van zijn opstel m.i. ten onrechte besloten tot de onderlinge gelijkheid der door de beide methoden verkregen en in werkelijkheid verschillende waarden, (wier ongelijkheid bijv., wat zijne laatste formule betreft, dan ook blijkt door daarin het binnen hare aangewezen geldigheids grens  $r > R + a$  liggende bijzondere geval  $a = 0$  te onderstellen). Immers de onderstelling, die bij deze eerste methode in wezenlijkheid ten grondslag wordt gelegd met betrekking

tot de wijze van verspreiding der lijnen in het vlak, en waarbij aan de punten van den eersten cirkel, beschouwd als snijpunten van daardoor gaande lijnen, als het ware zekere voorkeur gegeven wordt boven de overige punten van het vlak, is niet dezelfde als die bij de tweede methode, waar alle punten van het vlak in allen deele op dezelfde wijze voorkomen. Wilde men dan ook de in de eerste methode gevolgde rekenwijze toepassen, maar toch zóó dat men getrouw bleef aan de onderstelling bij de tweede methode aangenomen, dan zou niet uitsluitend voor ieder punt van den eersten cirkel, maar met hetzelfde recht voor ieder punt van het geheele vlak, hetzij binnen, op of buiten dien cirkel, als kans in rekening gebracht moeten worden de verhouding van het aantal daardoor gaande lijnen, die beide cirkels snijden, tot het aantal, die alleen den eersten cirkel snijden, waarna het gemiddelde van al deze kansen te nemen zou zijn. En bedunkt men nu, dat in het algemeen voor ieder punt, hetzij op eindigen of op oneindigen afstand, deze kans óf nul is, óf eene eindige waarde heeft, maar dat het aantal der oneindig verwijderde punten oneindig maal grooter is dan dat der eindig verwijderde; dan blijkt dat, bij de waardebepaling van het genoemde gemiddelde, deze laatste punten hun invloed in vergelijking van de overigen verliezen, dat men zich dus kan bepalen tot de beschouwing der punten in het oneindige, en dat, daar uit ieder van deze slechts lijnen evenwijdig aan eene bepaalde richting kunnen getrokken worden, — al welke richtingen reeds boven werden opgemerkt wel steeds op zich zelve gelijke kansen te hebben, maar, beschouwd als snijdende den eersten cirkel, alleen juist daarom wijl het hier een cirkel geldt, — men op deze wijze ten slotte toch weder tot de boven beschouwde tweede methode, of voor willekeurige figuren tot die van CROTON, wordt teruggevoerd.

2. Al het voorstaande is, zooals gezegd, gegrond op de onderstelling, dat reeds van den beginne af de lijnen over het geheele vlak in allen deele gelijkmatig verdeeld gedacht worden, en dat dus in dit opzicht de betrekking, waarin zij tot de eerst gegeven kromme voorkomen, niet den minsten invloed heeft.

Dit neemt intusschen niet weg, dat ook aan eene andere opvatting, en als gevolg daarvan tevens aan eene andere beantwoording, van het in den aanhef genoemde en van soortgelijke vraagstukken recht van bestaan kan worden toegekend; eene opvatting namelijk, waarbij de bedoelde lijnen van den aanvang af als het ware uit eenig meer bijzonder gezichtspunt of in eenige meer bijzondere beteekenis wor-

den beschouwd, zooals zij bijv. in het opgegeven vraagstuk reeds dadelijk als snijlijnen of koorden van den eersten cirkel kunnen worden aangemerkt. Bij dergelijke opvatting schijnt het meest natuurlijk de wet, waarnaar de lijnen verspreid gedacht worden, te regelen telkens zooveel mogelijk naar de eigenaardigheid van het bedoelde gezichtspunt; zij het ook, dat het dikwijls moeielijk zal vallen eene wet aan te wijzen, die als zoodanig noodwendig de voorkeur moet hebben boven iedere andere. Denkt men zich, om een voorbeeld te noemen, den eerst gegeven cirkel weder door eene willekeurige gegeven kromme vervangen, dan schijnt wel de meest natuurlijke aanname, die kromme in een oneindig aantal elementen van gelijke lengte in te deelen, en aan ieder deelpunt, beschouwd als het eerste der snijpunten van eene snijlijn met de kromme, gelijke kans te geven; maar zelfs dan blijft men eigenlijk nog vrij ten opzichte van de wijze van verspreiding van alle door dit punt gaande snijlijnen; dit neemt evenwel niet weg, dat in het thans bedoelde geval van eene willekeurige kromme de aanname, bijv. dat deze snijlijnen op alle overige deelpunten der kromme uitloopen, — om van andere mogelijke onderstellingen te zwijgen — beter met het begrip van snijlijnen of koorden eener kromme schijnt te strooken dan de bij de voorgaande opvatting van het vraagstuk aangenomen gelijkheid van alle hoeken rond het eerst beschouwde deelpunt. Zooveel is in allen gevalle zeker dat, alvorens tot de berekening van eene kans te kunnen overgaan zooals in het opgegeven vraagstuk bedoeld wordt, het volstrekt noodig is, het anders onbepaalde vraagstuk tot een bepaald te maken door zich in allen deele te verstaan omtrent de wijze van verspreiding der snijlijnen.

Houdt men zich meer in het bijzonder aan het vraagstuk, zooals het met betrekking tot twee cirkels gesteld werd, dan ligt het voor de hand om zich, zooals bij de eerste methode van den Heer SCHOUTE geschied is, werkelijk ieder der beide punten, die elke snijlijn met den eersten cirkel gemeen heeft, gelijkelijk over den cirkelomtrek zelf verdeeld te denken; met dat gevolg, dat niet alleen vooreerst alle punten van den cirkel als eerste snijpunten gelijke kans hebben, maar dat thans ook, nu het een cirkel geldt, de beide zoo even voor eene willekeurige kromme aangeduide wijzen van verspreiding der lijnen rond eenig punt samenvallen in ééne enkele; daarentegen zullen nu alle aan eene zelfde willekeurige richting evenwijdige snijlijnen niet onderling gelijke afstanden hebben, maar integendeel op den cirkel onderling gelijke bogen afsnijden. M. a. w. de snijlijnen

of koorden komen bij deze opvatting vóór als het samenstel van alle zijden en alle diagonalen van een regelmatigén in den cirkel beschreven veelhoek van een oneindig aantal zijden.

Voor het opmaken nu van de kans van snijding met den tweeden gegeven cirkel, met welke kans wij ons in de thans omschreven onderstelling hier verder zullen bezig houden, schijnt het dienstig het evengenoemde volledig samenstel op eene of andere wijze in te deelen in een oneindig aantal groepen, ieder bevattende een oneindig aantal koorden; en voor het gemak van de berekening verdient het aanbeveling die indeeling meer in het bijzonder zóó in te richten, dat zoowel alle groepen onderling, als ook in iedere groep op zich zelve alle daarvan deel uitmakende koorden, gelijke kans hebben. Hoofdzakelijk drie zoodanige methoden van indeeling doen zich daartoe op, die men de radiale, de evenwijdige en de concentrische indeeling zou kunnen noemen; namelijk die, waarbij de koorden eener zelfde groep óf van een zelfde punt van den cirkel uitgaan, óf evenwijdig aan eene zelfde richting loopen, óf wel gelijke bogen onderspannen. En heeft men dus, naarmate eene dezer methoden, of zelfs in het algemeen eenige andere, gevolgd wordt, voor de kans van snijding met den tweeden gegeven cirkel eene uitdrukking onder verschillende vormen verkregen, dan is men, juist doordien de berekeningen toch allen op hetzelfde samenstel van koorden betrekking hebben, van te voren van de onderlinge gelijkheid dezer uitdrukkingen verzekerd; terwijl daarentegen, zooals reeds opgemerkt, die gelijkheid in het algemeen niet zou gelden, wanneer de bij verschillende methoden gebezigde koorden niet in allen deele hetzelfde volledige samenstel zouden vormen.

3. Overgaande tot de werkelijke berekening van de meergenoemde kans volgens ieder der drie omschreven methoden van indeeling, denke men zich bijv. den eersten gegeven cirkel met straal  $r$  geteekend aan het linker-, den tweeden gegeven cirkel met straal  $R$  aan het regter-uiteinde van den afstand  $a$  hunner middelpunten  $m$  en  $M$ . Naarmate van de onderlinge ligging der beide cirkels dienen nu verschillende gevallen te worden onderscheiden.

4. Het eenvoudigste geval is dat, waarin de cirkel  $m$  geheel binnen  $M$  ligt, en dus  $R > a + r$  is, als wanneer het, ook zonder de toepassing van eenige methode van berekening, duidelijk is, dat iedere koorde van  $m$  tevens  $M$  snijdt, en dat dus de gevraagde kans van snijding  $K=1$  is.

Dit geval vereischt alzoo geene nadere overweging.

5. Een tweede geval is dat, waarin omgekeerd de cirkel  $M$  binnen  $m$  ligt, en dus  $r > a + R$  is.



Voor de toepassing van de eerste methode op dit en op de verdere gevallen stelle men op den voorgrond dat, als door eenig op een afstand  $b$  van het middelpunt van cirkel  $M$  liggend punt eene lijn wordt getrokken, makende met de lijn door dat middelpunt een hoek  $\phi$ , deze lijn den cirkel snijdt in twee punten, afhangende van  $\sqrt{R^2 - b^2 \sin^2 \phi}$ , en dus bestaanbaar zoolang  $\sin^2 \phi \leq \frac{R^2}{b^2}$  is, alzoo

vóór alle tusschen  $\pm B \sin \frac{R}{b}$ , en evenzoo vóór alle tusschen  $\mp B \sin \frac{R}{b}$

begrepen waarden van  $\phi$ , (staande hier en verder overal  $B \sin$  in plaats van den in het eerste kwadrant te nemen *Boog Sin*). Is dus  $b \leq R$ , dan zijn deze punten bestaanbaar voor alle mogelijke  $\phi$ ; dat is, men heeft de kans van snijding  $k = 1$ . Is daarentegen  $b > R$ , dan komen onder alle  $\phi$  van 0 tot  $2\pi$ , viermaal het aantal der tusschen 0 en  $B \sin \frac{R}{b}$  begrepenen vóór, die snijding geven; zoodat

dan de kans van snijding  $k = \frac{2}{\pi} B \sin \frac{R}{b}$  is. Denkt men zich nu,

overeenkomstig de eerste methode, ieder punt van den cirkel  $m$  bepaald door den (als gewoonlijk te rekenen van de lijn  $mM$  en in den zin van rechts bovenover naar links getelden) richtingshoek  $\theta$  van zijn straal, zoodat hier  $b = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}$  is; dan kenmerkt iedere tusschen 0 en  $2\pi$  genomen  $\theta$  eene groep koorden van cirkel  $m$ ; alle welke groepen onderling gelijke kansen hebben, en voor welke ieder in het bijzonder, — in het tegenwoordige geval  $r > a + R$ , als wanneer steeds  $b > (b_{\text{minimum}} \text{ of } r - a) > R$  is, — de kans, dat eene daartoe behoorende koorde tevens den cirkel  $M$  snijdt, is

$$k = \frac{2}{\pi} B \sin \frac{R}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}}.$$

En de kans, dat eene willekeurige koorde van  $m$  ook  $M$  zal snijden, wordt bijgevolg, daar telkens twee groepen  $\theta$  en  $2\pi - \theta$  geheel symmetrisch zijn, en men zich dus tot  $0 \leq \theta \leq \pi$  mag bepalen,

$$K = \frac{\int_0^\pi k d\theta}{\int_0^\pi d\theta} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi B \sin \frac{R}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}} d\theta.$$

Bij de toepassing der tweede methode heeft men te doen met groepen, onderling van gelijke kans, van evenwijdige koorden, zijnde ieder dezer groepen dus gekenmerkt door den richtingshoek  $\phi$  van hare koorden; deze hoek behoeft hier, uitheefde telkens twee groepen  $\phi$  en  $\pi + \phi$  samenvallen, en bovendien ieder paar groepen  $\phi$  en

$\pi - \phi$  symmetrisch voorkomt, slechts tusschen 0 en  $\frac{\pi}{2}$  veranderlijk gedacht te worden. Voor iedere groep  $\phi$  wordt dan, gelet op de gelijkmatige verdeling der punten op cirkel  $m$ , de kans dat eene koorde tevens den cirkel  $M$  zal snijden, blijkbaar uitgedrukt door het quotient van een der gelijke bogen, op  $m$  ter wederzijde afgesneden tusschen de beide aan  $\phi$  evenwijdige raaklijnen van  $M$ , gedeeld door den halven cirkelomtrek  $m$ ; deze kans is dus

$$k' = \frac{1}{\pi} \left( B \sin \frac{a \sin \phi + R}{r} - B \sin \frac{a \sin \phi - R}{r} \right).$$

Zoodat de totale kans van snijding wordt

$$\begin{aligned} K &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} k' d\phi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ B \sin \frac{a \sin \phi + R}{r} + B \sin \frac{a \sin(-\phi) + R}{r} \right\} d\phi = \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B \sin \frac{a \sin \phi + R}{r} d\phi, \end{aligned}$$

waarin namelijk het laatste lid verkregen is door op den tweeden term van het voorlaatste lid de algemeene formule  $\int_0^\varphi F(-\phi) d\phi = \int_\varphi^0 F(-\phi) d(-\phi) = \int_{-\varphi}^0 F(\phi) d\phi$  toe te passen.

Wat eindelijk de toepassing van de derde boven omschreven methode betreft: indien men door  $\psi$  den hoek verstaat tusschen eene uit eenig punt van cirkel  $m$  getrokken koorde en den straal van dit punt, zoodat  $r \sin \psi$  de afstand dier koorde tot het middelpunt is, dan heeft men groepen te beschouwen allen van dezelfde kans en ieder bestaande uit de raaklijnen in de gelijkmatig verdeelde punten van een concentrischen cirkel van straal  $r \sin \psi$ , waarbij aan de veranderlijke  $\psi$  wel alle waarden van  $-\frac{\pi}{2}$  tot  $+\frac{\pi}{2}$  zouden te geven zijn, maar men zich wegens de symmetrie weder tot de tusschen 0 en  $\frac{\pi}{2}$  liggende waarden mag bepalen. De kans  $k''$  nu, dat voor eene dergelijke groep  $\psi$  zulk eene raaklijn den cirkel  $M$  snijdt, is, zooals gemakkelijk is na te gaan: wanneer cirkel  $r \sin \psi$  binnen  $M$  ligt, gelijk de eenheid; wanneer zij elkander snijden, gelijk aan het quotient van den tusschen hunne beide gemeenschappelijke raaklijnen

begrepen en naar M gekeerden boog van cirkel  $r \sin \psi$ , gedeeld door den omtrek van dien cirkel; wanneer zij buiten elkander liggen, gelijk aan het quotient van den boog op cirkel  $r \sin \psi$ , tusschen de raakpunten van de uitwendige en de inwendige gemeenschappelijke raaklijn begrepen, gedeeld door den halven omtrek van dien cirkel; wanneer eindelijk cirkel M binnen cirkel  $r \sin \psi$  ligt, gelijk nul. Van daar dat bij de toepassing van de tegenwoordige methode, althans aanvankelijk, eene onderscheiding in twee gevallen noodig is, en dat men namelijk heeft:

1°. indien  $a < R$  is,

$$\text{voor } 0 < \sin \psi < \frac{R-a}{r}, \quad k'' = 1;$$

$$\text{voor } \frac{R-a}{r} < \sin \psi < \frac{R+a}{r}, \quad k'' = \frac{1}{\pi} B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a};$$

$$\text{voor } \frac{R+a}{r} < \sin \psi < 1, \quad k'' = 0;$$

2°. indien  $a > R$  is,

$$\text{voor } 0 < \sin \psi < \frac{a-R}{r}, \quad k'' = \frac{1}{\pi} \left( B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a} - B \cos \frac{r \sin \psi + R}{a} \right);$$

$$\text{voor } \frac{a-R}{r} < \sin \psi < \frac{a+R}{r}, \quad k'' = \frac{1}{\pi} B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a};$$

$$\text{voor } \frac{a+R}{r} < \sin \psi < 1, \quad k'' = 0;$$

en verder steeds de totale kans van snijding van cirkel M,

$$K = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} k'' d\psi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k'' d\psi.$$

Brengt men nu hierin de zoo even gevonden waarden van  $k''$  met inachtneming van hare geldigheidsgrenzen over, dan komt aanvankelijk:

$$\text{voor } a < R, \quad K = \frac{2}{\pi} \left( B \sin \frac{R-a}{r} + \frac{1}{\pi} \int_{B \sin \frac{R-a}{r}}^{B \sin \frac{R+a}{r}} B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a} . d\psi \right),$$

en voor  $a > R$ ,

$$K = \frac{2}{\pi^2} \left( \int_0^{B \sin \frac{a+R}{r}} B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a} \cdot d\psi - \int_0^{B \sin \frac{a-R}{r}} B \cos \frac{r \sin \psi + R}{a} \cdot d\psi \right);$$

maar merkt men dan verder op, dat de laatste formule ook te schrijven is onder den vorm

$$\begin{aligned} K &= \frac{2}{\pi^2} \left\{ \int_0^{B \sin \frac{a+R}{r}} B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a} \cdot d\psi - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{B \sin \frac{a-R}{r}} \left[ \pi - B \cos \left( -\frac{r \sin \psi + R}{a} \right) \cdot d\psi \right] \right\} = \\ &= \frac{2}{\pi^2} \left\{ -\pi B \sin \frac{a-R}{r} + \int_0^{B \sin \frac{a+R}{r}} B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a} \cdot d\psi + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{B \sin \frac{a-R}{r}} B \cos \frac{r \sin (-\psi) - R}{a} \cdot d\psi \right\}, \end{aligned}$$

dan blijkt, door op den laatsten term weder als boven toe te passen

$\int_0^\psi F(-\psi) d\psi = \int_{-\psi}^0 F(\psi) d\psi$ , dat deze formule met de eerste samenvalt, en die eerste dus als de steeds geldige is op te vatten.

Vat men alzoo ten slotte de volgens de drie gebezigde methoden verkregen uitkomsten samen, dan is de oplossing van het gestelde vraagstuk, voor het geval van cirkel M binnen  $m$ , begrepen in de formules:

$$\begin{aligned} K &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi B \sin \frac{R}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)}} \cdot d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B \sin \frac{a \sin \phi + R}{r} \cdot d\phi = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( B \sin \frac{R-a}{r} + \frac{1}{\pi} \int_{B \sin \frac{R-a}{r}}^{B \sin \frac{R+a}{r}} B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a} \cdot d\psi \right) \dots (1.) \end{aligned}$$

6. Na de vorenstaande uiteenzetting zal op dezelfde grondslagen de toepassing van de drie gebezigde methoden op de beide nog te onderzoeken gevallen van andere betrekkelijke ligging der twee gegeven cirkels beknopter kunnen plaats hebben.

Vooreerst het geval, waarin de cirkels elkander snijden, dat is waarin zoowel  $a < r + R$  als  $r < a + R$  en  $R < a + r$  is.

Bij de toepassing van de eerste methode heeft men alsdan:

$$\text{zoolang } 1 > \cos \theta > \frac{a^2 + r^2 - R^2}{2ar}, \text{ en dus } (\theta_{\min.} \text{ of } \pm(a-r)) < \theta < R \text{ is,}$$

$$k = 1;$$

$$\text{en zoolang } \frac{a^2 + r^2 - R^2}{2ar} > \cos \theta > -1, \text{ en dus } R < \theta < (\theta_{\max.} \text{ of } a+r) \text{ is,}$$

$$k = \frac{2}{\pi} B \sin \frac{R}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}}.$$

Bij de toepassing van de tweede methode onderscheide men aanvankelijk de twee volgende gevallen:

1°.  $r < R$ , als wanneer,

zoolang  $0 < \sin \phi < \frac{R-r}{a}$  is, alle tot de groep  $\phi$  behorende koorden van cirkel  $m$  tevens cirkel  $M$  snijden, en dus  $k' = 1$  is,

terwijl voor  $\frac{R-r}{a} < \sin \phi < 1$  de kans van snijding van  $M$  gelijk is aan het quotient van den op cirkel  $m$  door de aan  $\phi$  evenwijdige raaklijn van  $M$  afgesneden en naar  $M$  gekeerden boog, gedeeld door den omtrek van cirkel  $m$ , dat is  $k' = \frac{1}{\pi} B \cos \frac{a \sin \phi - R}{r}$ ;

2°.  $r > R$ , als wanneer men

$$\text{voor } 0 < \sin \phi < \frac{r-R}{a} \text{ heeft } k' = \frac{1}{\pi} \left( B \cos \frac{a \sin \phi - R}{r} - B \cos \frac{a \sin \phi + R}{r} \right),$$

$$\text{en voor } \frac{r-R}{a} < \sin \phi < 1, k' = \frac{1}{\pi} B \cos \frac{a \sin \phi - R}{r}.$$

Bij de toepassing eindelijk van de derde methode komt weder aanvankelijk de onderscheiding te pas in:

1°.  $a < R$ , gevende

$$\text{voor } 0 < \sin \psi < \frac{R-a}{r}, k'' = 1;$$

$$\text{voor } \frac{R-a}{r} < \sin \psi < 1, k'' = \frac{1}{\pi} B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a};$$

en 2°.  $a > R$ , gevende

$$\text{voor } 0 < \sin \psi < \frac{a-R}{r}, k'' = \frac{1}{\pi} \left( B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a} - B \cos \frac{r \sin \psi + R}{a} \right);$$

$$\text{voor } \frac{a-R}{r} < \sin \psi < 1, k'' = \frac{1}{\pi} B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a}.$$

Maakt men nu op dezelfde wijze als boven, namelijk door de formelen

$$K = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} k d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k' d\phi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k'' d\psi,$$

uit deze kansen voor iedere groep in het bijzonder de totale kans van snijding op, dan doet zich deze kans in het tweede der zoo even bij de tweede en ook bij de derde methode omschreven gevallen aanvankelijk wel onder een anderen vorm vóór dan in het eerste dier gevallen, namelijk

voor  $r > R$ ,

$$K = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} B \cos \frac{a \sin \phi - R}{r} \cdot d\phi - \int_0^{B \sin \frac{r-R}{a}} B \cos \frac{a \sin \phi + R}{r} \cdot d\phi \right),$$

en voor  $a > R$ ,

$$K = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a} \cdot d\psi - \int_0^{B \sin \frac{a-R}{r}} B \cos \frac{r \sin \psi + R}{a} \cdot d\psi \right);$$

maar dan blijkt toch door eene volkomen soortgelijke herleiding als reeds boven bij de derde methode voor cirkel M binnen cirkel  $m$  werd toegepast, dat deze vormen zich ieder laten terugbrengen tot die, welke men in het overeenkomstige eerste geval vindt; en dat dus de oplossing van het vraagstuk voor het geval van twee gegeven snijdende cirkels steeds vervat is in de formules:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\pi} \left( B \cos \frac{a^2 + r^2 - R^2}{2ar} + \frac{2}{\pi} \int_{B \cos \frac{a^2 + r^2 - R^2}{2ar}}^{\frac{\pi}{2}} B \sin \frac{R}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)}} \cdot d\theta \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( B \sin \frac{R-r}{a} + \frac{1}{\pi} \int_{B \sin \frac{R-r}{a}}^{\frac{\pi}{2}} B \cos \frac{a \sin \phi - R}{r} \cdot d\phi \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( B \sin \frac{R-a}{r} + \frac{1}{\pi} \int_{B \sin \frac{R-a}{r}}^{\frac{\pi}{2}} B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a} \cdot d\psi \right) \dots \dots \dots (1b) \end{aligned}$$

7. Blijft thans nog het geval, waarin de twee gegeven cirkels buiten elkander liggen, dat is waarin  $a > r + R$  is.

Volgens de eerste methode heeft men alsdan voor alle  $\theta$  (zijnde

$$0 < \theta < \pi), \quad b \geq (b_{\min.} \text{ of } a-r) > R, \text{ dus } k = \frac{2}{\pi} B \sin \frac{R}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)}}.$$

Voor de tweede methode onderscheide men weder aanvankelijk de twee gevallen:

1°.  $r < R$ , als wanneer

voor  $0 < \sin \phi < \frac{R-r}{a}$ ,  $k' = 1$ ;

voor  $\frac{R-r}{a} < \sin \phi < \frac{R+r}{a}$ ,  $k' = \frac{1}{\pi} B \cos \frac{a \sin \phi - R}{r}$ ;

voor  $\frac{R+r}{a} < \sin \phi < 1$ ,  $k' = 0$  is;

2°.  $r > R$ , als wanneer

voor  $0 < \sin \phi < \frac{r-R}{a}$ ,  $k' = \frac{1}{\pi} \left( B \cos \frac{a \sin \phi - R}{r} - B \cos \frac{a \sin \phi + R}{r} \right)$ ;

voor  $\frac{r-R}{a} < \sin \phi < \frac{r+R}{a}$ ,  $k' = \frac{1}{\pi} B \cos \frac{a \sin \phi - R}{r}$ ;

voor  $\frac{r+R}{a} < \sin \phi < 1$ ,  $k' = 0$  is.

Voor de toepassing van de derde methode is voor iedere  $\psi$  (zijnde  $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ ),

$$k'' = \frac{1}{\pi} \left( B \cos \frac{r \sin \psi - R}{a} - B \cos \frac{r \sin \psi + R}{a} \right) = \\ = \frac{1}{\pi} \left\{ B \sin \frac{r \sin \psi + R}{a} + B \sin \frac{r \sin(-\psi) + R}{a} \right\}.$$

Maakt men nu uit deze waarden van  $k$ ,  $k'$  en  $k''$  weder als boven de totale kans  $K$  van snijding op, dan vindt men daarvoor in het tweede geval van de tweede methode ook thans aanvankelijk een anderen vorm, namelijk:

voor  $r > R$ ,

$$K = \frac{2}{\pi^2} \left( \int_0^{B \sin \frac{r+R}{a}} B \cos \frac{a \sin \phi - R}{r} . d\phi - \int_0^{B \sin \frac{r-R}{a}} B \cos \frac{a \sin \phi + R}{r} . d\phi \right),$$

dan in het eerste geval van deze methode; maar dan blijkt ook nu wederom op dezelfde wijze als boven dat deze vorm zich laat herleiden tot dien voor dit eerste geval. En de uitkomst is dan ook dat in het geval van twee buiten elkander liggende cirkels het vraagstuk steeds wordt opgelost door de formules:

$$K = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi B \sin \frac{R}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}} . d\theta = \\ = \frac{2}{\pi} \left( B \sin \frac{R-r}{a} + \frac{1}{\pi} \int_{B \sin \frac{R-r}{a}}^{B \sin \frac{R+r}{a}} B \cos \frac{a \sin \phi - R}{r} . d\phi \right) = \\ = \frac{2}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B \sin \frac{r \sin \psi + R}{a} . d\psi . \dots \dots \dots (1.)$$

8. Met betrekking tot de voor de drie beschouwde gevallen van onderlinge ligging der gegeven cirkels opgemaakte formules (1<sub>a</sub>), (1<sub>b</sub>) en (1<sub>c</sub>) valt op te merken dat, evenals het eerste van deze gevallen ( $r > a + R$ ) en het derde ( $a > r + R$ ) zelve zich van elkander onderscheiden door verwisseling van  $a$  en  $r$ , zoo ook de daarvoor geldige formules (1<sub>a</sub>) en (1<sub>c</sub>) alleen verschillen door vervanging van  $a$ ,  $r$ ,  $\phi$  en  $\psi$  door  $r$ ,  $a$ ,  $\psi$  en  $\phi$ , blijvende daarbij  $R$  en  $\theta$  onveranderd; terwijl daarentegen de formules (1<sub>b</sub>) voor het tweede geval ( $a < r + R$  met  $r < a + R$  en  $R < a + r$ ), dat als het ware den overgang tusschen de beide anderen vormt, meer op zich zelve staan en bij de evengenoemde vervanging in elkander overgaan.

Verlangt men, onafhankelijk van het behandelde vraagstuk van kansrekening, zich te vergewissen van de onderlinge gelijkheid der telkens in  $\theta$ , in  $\phi$  en in  $\psi$  verkregen bepaalde integralen, die blijkbaar tot de elliptische behooren, dan kan men daartoe o. a. geraken door aan te toonen, dat hare eerste afgeleiden, bijv. naar  $R$ , onderling gelijk zijn, en dat zij zelve tevens voor eene of andere bepaalde waarde van  $R$  aan elkander gelijk worden. Wat dit laatste betreft, ziet men werkelijk in (1<sub>a</sub>), door aldaar de voor  $r > a + R$  toe te laten onderstelling  $R = 0$  in te voeren, de eerste integraal dadelijk in nul overgaan en de tweede en de derde, namelijk

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B \sin \frac{a \sin \phi}{r} \cdot d\phi = \\ = \frac{2}{\pi} \left\{ -B \sin \frac{a}{r} + \frac{1}{\pi} \int_{-B \sin \frac{a}{r}}^{B \sin \frac{a}{r}} \left( \frac{\pi}{2} - B \sin \frac{r \sin \psi}{a} \right) \cdot d\psi \right\}, \end{aligned}$$

evenzoo, door slechts te bedenken dat zoowel  $B \sin \frac{a \sin \phi}{r}$  als  $B \sin \frac{r \sin \psi}{a}$  oneven functiën van  $\phi$  en van  $\psi$  zijn. En desgelijks mag in (1<sub>b</sub>) dezelfde onderstelling  $R = 0$ , — die hier niet strijdt met de voorwaarde  $R < a + r$ , maar thans, om te kunnen voldoen zoowel aan  $a < r + R$  als aan  $r < a + R$ , met zich brengt dat  $a = r$  zij, — ter verificatie worden toegelaten, waardoor wederom niet alleen dadelijk de vorm in  $\theta$ , maar ook die in  $\phi$ , dat is

$$\frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) d\phi \right\},$$



en evenzoo de gelijke vorm in  $\psi$ , zich tot nul herleidt. Terwijl voor (1.), op grond van de boven opgemerkte verwisselbaarheid, mag verwezen worden naar het zoo even voor (1.) gezegde.

Blijft dus over, het bewijs te leveren van de onderlinge gelijkheid der boven bedoelde afgeleiden naar  $R$ . Eerst voor (1.), dat is dus wederom bij verwisseling tevens voor (1.). Na alvorens met  $\frac{\pi^2}{2}$  vermenigvuldigd te hebben — en gelet, voor zoover den vorm in  $\psi$  betreft, wiens grenzen van  $R$  zelf afhangen, op de algemeene formule

$$\frac{d \cdot \int_Y^{Y'} f(x, y) dx}{dy} = \int_Y^{Y'} \frac{d \cdot f(x, y)}{dy} dx + f(Y', y) \cdot \frac{dY'}{dy} - f(Y, y) \cdot \frac{dY}{dy},$$

(zie bijv. R. LOBATTO, *Integraal-rekening*, 1851, pag. 149, formule (1)), — blijkt dan bewezen te moeten worden dat, altijd ingeval van  $r > a + R$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{(a^2 + r^2 - R^2 - 2ar \cos \theta)}} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{r^2 - (a \sin \phi + R)^2}} = \\ &= \int_{B \sin \frac{R-a}{r}}^{B \sin \frac{R+a}{r}} \frac{d\psi}{\sqrt{a^2 - (r \sin \psi - R)^2}} \end{aligned}$$

is. Dit nu kan worden aangetoond door, waar men over de drie veranderlijken  $\theta$ ,  $\phi$  en  $\psi$  naar willekeur mag beschikken, daartuschen de betrekkingen van afhankelijkheid

$$\frac{(r-R)^2 - a^2}{(r-R) - a \cos \theta} = (r-R) - a \sin \phi = r(1 - \sin \psi)$$

op te stellen, waarvan de eerste na eene kleine herleiding blijkt ook onder den vorm  $Tg \frac{\theta}{2} \cdot Tg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) = \sqrt{\frac{r-R-a}{r-R+a}}$  geschreven te kunnen worden en werkelijk met  $r > a + R$  bestaanbaar is, evenals de tweede blijkens  $-r < -a - R < -a + R \leq a \sin \phi + R < a + R < r$  in verband met  $-r < r \sin \psi < r$ . Deze betrekkingen geven vooreerst door differentiatie

$$\frac{a \{ (r-R)^2 - a^2 \} \sin \theta d\theta}{\{ (r-R) - a \cos \theta \}^2} = a \cos \phi d\phi = r \cos \psi d\psi;$$

ten andere, door ze opvolgend van  $r-R$  en van  $r$  af te trekken,

$$\frac{a \{a - (r-R) \cos \theta\}}{(r-R) - a \cos \theta} = a \sin \phi = r \sin \psi - R$$

$$\text{en } \frac{r \{(r-R) - a \cos \theta\} - \{(r-R)^2 - a^2\}}{(r-R) - a \cos \theta} = a \sin \phi + R = r \sin \psi;$$

welke beide laatsten op hare beurt, na vierkantsverheffing opvolgend van  $a^2$  en van  $r^2$  afgetrokken, als vierkantswortels uit de resten opleveren:

$$\frac{a \sin \theta \cdot \sqrt{\{(r-R)^2 - a^2\}}}{(r-R) - a \cos \theta} = a \cos \phi = \sqrt{a^2 - (r \sin \psi - R)^2}$$

$$\text{en } \frac{\sqrt{\{(r-R)^2 - a^2\}} \{a^2 + r^2 - R^2 - 2ar \cos \theta\}}{(r-R) - a \cos \theta} = \sqrt{r^2 - (a \sin \phi + R)^2} = r \cos \psi.$$

En deelt men nu eindelijk het product van de twee allerlaatste betrekkingen op de evengevonden differentiaal-betrekkingen, dan komt

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - R^2 - 2ar \cos \theta}} &= \frac{d\phi}{\sqrt{r^2 - (a \sin \phi + R)^2}} = \\ &= \frac{d\psi}{\sqrt{a^2 - (r \sin \psi - R)^2}}, \end{aligned}$$

waarvan de integraal, lettende dat blijkens de voorspogestelde betrekkingen van afhankelijkheid, bij de benedengrens  $\theta = 0$  behoort

$$\phi = -\frac{\pi}{2} \text{ en } \psi = B \sin \frac{R-a}{r}, \text{ en bij de bovengrens } \theta = \pi \text{ behoort}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \text{ en } \psi = B \sin \frac{R+a}{r}, \text{ juist is wat bewezen moet worden.}$$

Voor de geldigheid der formules (1.) moet evenzoo, na met  $\frac{\pi^2}{2}$  vermenigvuldigd en naar  $R$  afgeleid te hebben, bewezen worden, dat — mits zoowel  $a < r + R$  als  $r < a + R$  en  $R < a + r$  zij — steeds

$$\begin{aligned} \int_{B \cos \frac{R-r}{a}}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - R^2 - 2ar \cos \theta}} &= \\ = \int_{B \sin \frac{R-r}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{r^2 - (a \sin \phi + R)^2}} &= \int_{B \sin \frac{R-a}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{a^2 - (r \sin \psi - R)^2}} \end{aligned}$$

wordt. Een afzonderlijk bewijs is daartoe na het vorige niet noodig; men kan volstaan met in de zoo even gebezigde formules gelijktijdig  $R$  en  $\psi$  negatief te nemen, waardoor zij o. a. geven

$$\frac{(r+R)^2 - a^2}{(r+R) - a \cos \theta} = (r+R) - a \sin \phi = r(1 + \sin \psi),$$

$$\left( \text{of wat de eerste betreft, } Tg \frac{\theta}{2} \cdot Tg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) = \sqrt{\frac{r+R-a}{r+R+a}} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{en } \frac{d\theta}{\sqrt{(a^2 + r^2 - R^2 - 2ar \cos \theta)}} &= \frac{d\phi}{\sqrt{r^2 - (a \sin \phi - R)^2}} = \\ &= - \frac{d\psi}{\sqrt{a^2 - (r \sin \psi - R)^2}}; \end{aligned}$$

waarvan de eerste uitwijst, dat bij de thans als benedengrens van de integraal der tweede te nemen  $\theta = B \cos \frac{a^2 + r^2 - R^2}{2ar}$  behoort  $\phi = B \sin \frac{R-r}{a}$  (hetgeen in het tegenwoordige geval wegens  $-1 < \frac{R-r}{a} < 1$  steeds mogelijk is) en  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , en bij de bovengrens  $\theta = \pi$  behoort  $\phi = \frac{\pi}{2}$  en  $\psi = B \sin \frac{R-a}{r}$  (wegens  $-1 < \frac{R-a}{r} < 1$  wederom mogelijk); zoodat ook hier, na verwisseling der beide grenzen van de integraal in  $\psi$ , gepaard met omkeering van het teeken dier integraal, het gestelde bewezen is.

9. Ook door ontwikkeling in oneindig voortlopende reeksen kan de onderlinge gelijkheid der voor de kans  $K$  gevonden waarden in  $\theta$ , in  $\phi$  en in  $\psi$  worden aangetoond. Wij zullen ons in dit opzicht evenwel beperken tot de beschouwing van de in de formules (1.) voorkomende bepaalde integralen in  $\theta$  en in  $\phi$ .

Men heeft dan vooreerst

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi B \sin \frac{R}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)}} \cdot d\theta = \\ &= \int_0^\pi \left\{ \sum_0^\infty \frac{1.3.5...(2p-1)}{2.4.6...2p} \cdot \frac{1}{2p+1} \cdot \frac{R^{2p+1}}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{\frac{2p+1}{2}}} \right\} d\theta = \\ &= \sum_0^\infty \left\{ \frac{1.3.5...(2p-1)}{2.4.6...2p} \cdot \frac{1}{2p+1} \left( \frac{R}{r} \right)^{2p+1} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\left( 1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} \cos \theta \right)^{\frac{2p+1}{2}}} \right\}, \end{aligned}$$

waarin ook in de voor de binomiaal-coëfficiënten gebruikelijke notatie te schrijven zou zijn de coëfficiënt

$$\frac{1.3.5...(2p-1)}{2.4.6...2p} = (-)^p \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2} \dots -\frac{2p-1}{2}}{1.2.3...p} = (-)^p \binom{-\frac{1}{2}}{p},$$

$$\text{of eenvoudiger nog} = \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right) \left(p-\frac{3}{2}\right) \left(p-\frac{5}{2}\right) \dots \frac{1}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} = \binom{p-\frac{1}{2}}{p},$$

$$\text{of ook} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2p}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p)^2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} = \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p},$$

of nog

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2p-2)} = \frac{(2p-1)!}{2^p \cdot p! 2^{p-1} (p-1)!} = \frac{1}{2^{2p-1}} \binom{2p-1}{p},$$

terwijl deze zelfde coëfficiënt, geschreven onder den vorm

$$\frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} = \frac{(p+1)^2 \cdot (2p+1)!}{2^{2p} \cdot (2p+1) \cdot ((p+1)!)^2},$$

blijkt voor  $p = 0$  gelijk de eenheid genomen te moeten worden, zooals trouwens steeds met den binomiaal-coëfficiënt  $\binom{n}{0}$  van eene willekeurige  $n^{\text{de}}$  magt het geval is.

Nu wordt

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} \cos \theta\right)^{\frac{2p+1}{2}}} &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{\left\{1 - \frac{a}{r} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + \frac{a^2}{r^2}\right\}^{\frac{2p+1}{2}}} = \\ &= \int_0^\pi \left(1 - \frac{a}{r} e^{i\theta}\right)^{-\frac{2p+1}{2}} \left(1 - \frac{a}{r} e^{-i\theta}\right)^{-\frac{2p+1}{2}} d\theta = \\ &= \int_0^\pi \left\{ \sum_0^\infty \frac{(2p+1)(2p+3) \dots (2p+2q-1)}{2 \cdot 4 \dots 2q} \left(\frac{a}{r}\right)^q e^{iq\theta} \right\} \\ &\quad \left\{ \sum_0^\infty \frac{(2p+1)(2p+3) \dots (2p+2q'-1)}{2 \cdot 4 \dots 2q'} \left(\frac{a}{r}\right)^{q'} e^{-iq'\theta} \right\} d\theta = \\ &= \sum_0^\infty \sum_0^\infty \left\{ \frac{(2p+1)(2p+3) \dots (2p+2q-1)}{2 \cdot 4 \dots 2q} \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{(2p+1)(2p+3) \dots (2p+2q'-1)}{2 \cdot 4 \dots 2q'} \left(\frac{a}{r}\right)^{q+q'} \int_0^\pi (e^{i(q-q')\theta} + e^{-i(q-q')\theta}) d\theta \right\}, \end{aligned}$$

of, — omdat in het algemeen deze laatste integraal gelijk

$$\int_0^\pi 2 \cos(q-q')\theta \cdot d\theta = \left[ \frac{2 \sin(q-q')\theta}{q-q'} \right]_0^\pi = 0 \text{ is, behalve telkens voor } q = q', \text{ als wanneer echter in het zoo even uitgewerkte product}$$

van  $\sum_0^\infty$  met  $\sum_0^\infty$  in de plaats van de som der twee termen in  $e$

slechts één enkele term, namelijk de eenheid, komt en de overeenkomstige integraal dus wordt  $\int_0^\pi d\theta = \pi$ , — vindt men

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} \cos \theta\right)^{\frac{2p+1}{2}}} =$$

$$= \pi \sum_q \left( \frac{(2p+1)(2p+3) \dots (2p+2q-1)}{2 \cdot 4 \dots 2q} \right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^{2q},$$

en deze waarde substitueerende, bijgevolg

$$\int_0^\pi B \sin \frac{R}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}} \cdot d\theta =$$

$$= \pi \sum_0^\infty \left\{ \frac{1.3.5 \dots (2p-1)}{2.4.6 \dots 2p} \cdot \frac{1}{2p+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2p+1} \cdot \sum_0^\infty \left( \frac{(2p+1)(2p+3) \dots (2p+2q-1)}{2.4 \dots 2q} \right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^{2q} \right\}$$

$$= \pi \sum_0^\infty \left\{ \frac{1}{(2p+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2p+1} \cdot \sum_0^\infty \left( \frac{1.3.5 \dots (2p+2q-1)}{2.4.6 \dots 2q} \right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^{2q} \right\}, \dots (2)$$

waar in het tweede lid de coëfficiënt in  $q$  voor  $q=0$  om dezelfde reden als boven gelijk de eenheid te nemen is, terwijl het derde lid, dat wel algebraïsch een meer beknopten vorm heeft dan het tweede, maar toch voor de getallenberekening minder eenvoudig is, hoofdzakelijk is bijgevoegd met het oog op de straks volgende bepaling van de integraal in  $\phi$ .

Ten aanzien van de onmiddellijk aan (2) voorafgaande integraal kan men in het voorbijgaan nog opmerken, dat deze als meest eenvoudige bijzondere gevallen voor  $p=0$  en voor  $p=-1$  bevat de ontwikkeling van het dubbel der beide volledige elliptische integralen

$$F'(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{en} \quad E'(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta} \cdot d\theta$$

van de eerste en de tweede soort, namelijk

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} \cos \theta\right)}} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\left\{1 + \frac{4ar}{(r-a)^2} \sin^2 \theta\right\}}} = \pi \sum_0^\infty \left( \frac{1.3 \dots (2q-1)}{2.4 \dots 2q} \right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^{2q}$$

$$\begin{aligned} & \text{en } \int_0^{\pi} \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2 \frac{a}{r} \cos \theta\right)} \cdot d\theta = \\ & = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \int_0^{\pi} \sqrt{\left\{1 + \frac{4ar}{(r-a)^2} \sin^2 \theta\right\}} \cdot d\theta = \pi \sum' \left(\frac{-1.1.3..(2q-3)}{2.4.6..2q}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^{2q}; \end{aligned}$$

(verg. bijv. R. LOBATTO, *Integraal-rekening*, bladz. 107—110 en III noot, alwaar in

$$A = (1+a) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 a^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 a^6 + \text{enz.} \right\}$$

en in de evenzoo te vinden formule

$$(1+a)B = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 a^4 + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 a^6 + \text{enz.},$$

slechts  $a$  te vervangen is door  $-\frac{a}{r}$  en dus  $c^2$  door  $-\frac{4ar}{(r-a)^2}$ .)

10. Overgaande tot de ontwikkeling van de integraal in  $\phi$ , heeft men

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B \sin \frac{a \sin \phi + R}{r} \cdot d\phi = \\ & = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_p \frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6..2p} \cdot \frac{1}{2p+1} \cdot \frac{(a \sin \phi + R)^{2p+1}}{r^{2p+1}} \right\} d\phi = \\ & = \sum_p \left\{ \frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6..2p} \cdot \frac{1}{(2p+1)r^{2p+1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R + a \sin \phi)^{2p+1} d\phi \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{waarin } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R + a \sin \phi)^{2p+1} d\phi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_q \binom{2p+1}{q} R^{2p-q+1} a^q \sin^q \phi d\phi \right\} \text{ is.}$$

Omdat nu  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^q \phi d\phi$  telkens voor oneven  $q$  gelijk nul wordt,

terwijl men voor even  $q$ , vervangende alsdan  $q$  door  $2q$ , heeft

$$(-)^q \sin^{2q} \phi = (2i \sin \phi)^{2q} = (e^{i\phi} - e^{-i\phi})^{2q} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{q-1} (-)^s \binom{2q}{s} (e^{(2q-s)\psi} \cdot e^{-s\psi} + e^{s\psi} \cdot e^{-(2q-s)\psi}) + (-)^q \binom{2q}{q} e^{q\psi} \cdot e^{-q\psi} = \\
&= \sum_{s=0}^{q-1} (-)^s \binom{2q}{s} 2 \cos 2(q-s)\phi + (-)^q \binom{2q}{q},
\end{aligned}$$

en dus omdat steeds

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2(q-s)\phi \, d\phi &= \left[ \frac{\sin 2(q-s)\phi}{2(q-s)} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \text{ is,} \\
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \phi \, d\phi &= \frac{1}{2^2} \binom{2q}{q} \pi = \frac{1.3.5 \dots (2q-1)}{2.4.6 \dots 2q} \pi
\end{aligned}$$

(zie dit ook op andere wijze bij LOBATTO, blad. 117, form. (3)), — komt

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R + a \sin \phi)^{2p+1} d\phi &= \pi \sum_{s=0}^p \binom{2p+1}{2q} R^{2p-2s+1} a^{2s} \cdot \frac{1.3.5 \dots (2q-1)}{2.4.6 \dots 2q} = \\
&= \pi \sum_{s=0}^p \frac{(2p+1) \cdot 2p(2p-1) \dots (2p-2q+2)}{(2.4.6 \dots 2q)^2} R^{2p-2s+1} a^{2s},
\end{aligned}$$

en dus door substitutie

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B \sin \frac{a \sin \phi + R}{r} \cdot d\phi = \\
&= \pi \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{1.3.5 \dots (2p-1)}{2.4.6 \dots 2p} \cdot \frac{1}{r^{2p+1}} \sum_{s=0}^p \frac{2p(2p-1) \dots (2p-2q+2)}{(2.4.6 \dots 2q)^2} R^{2p-2s+1} a^{2s} \right\} = \\
&= \pi \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{(1.3.5 \dots (2p-1))^2}{r^{2p+1}} \cdot \sum_{s=0}^p \frac{R^{2p-2s+1} a^{2s}}{(2p-2q+1)!(2.4.6 \dots 2q)^2} \right\}, \dots (2')
\end{aligned}$$

waarin weder het laatste lid is bijgevoegd, ten einde deze uitkomst gemakkelijk met de boven gevondene (2) te kunnen vergelijken.

Op grond toch van de formules (1.), waarin zoowel de volgens (2) ontwikkelde bepaalde integraal in  $\phi$  als de thans verkregene (2') in  $\phi$  met denzelfden factor  $\frac{2}{\pi^2}$  aangedaan voorkomen, moeten deze beide waarden aan elkander gelijk zijn. De eerste, volgens de opklimmende machten van  $\frac{R}{r}$ , heeft voor iederen term tot coëfficiënt eene oneindig voortlopende reeks in  $\frac{a}{r}$ ; de tweede daarentegen, volgens de opklimmende machten van  $\frac{1}{r}$ , is in zooverre eenvoudiger

gerangschikt, dat ieder harer coëfficiënten slechts uit eene eindige reeks, zij het dan ook van een steeds klimmend aantal termen, bestaat. En om nu de identiteit der beide ontwikkelingen aan te toonen kan men bijv. in (2'), stellende  $p - q = p'$ , eerst de bij eene bepaalde waarde van  $p'$  behoorende termen in  $R^{2p'+1}$  bijéénbrengen, om dan ten slotte aan deze als veranderlijk gedachte  $p'$  alle waarden van 0 tot  $\infty$  te geven; dergelijke bijéénbehoorende termen in  $R^{2p'+1}$  komen nu evenwel niet vóór in alle onder het eerste sommatieteekeken ( $p$  of  $p' + q = 0$  tot  $\infty$ ) vervatte termen van (2'), maar eerst te beginnen met die, waarvoor de veranderlijke  $q = 0$  of  $p = p'$  is, zoodat dit eerste sommatieteekeken vervangen behoort te wor-

den door  $\sum_0^{\infty} q$ , en dan samenvalt met het tweede of  $\sum_0^{p'+q}$ , daar

toch de grens  $q = p' + q$  slechts bereikt wordt door  $q = \infty$ . En door nu overigens in het laatste lid van (2') te substitueeren  $p = p' + q$ , en daarna als gezegd ten opzichte van  $p'$  te sommeeren, onderscheidt zich de uitkomst werkelijk door niets anders van het laatste lid van (2), dan doordat de buiten invloed op de waarde der uitkomst blijvende notatie  $p$  thans met een accent voorkomt.

11. Behalve de ontwikkeling van de thans gelijk gebleken bepaalde integralen (2) en (2') volgens de machten van  $\frac{R}{r}$  of volgens die

van  $\frac{1}{r}$ , kan nog hare rangschikking volgens de machten van  $\frac{a}{r}$  in aanmerking komen; waartoe het trouwens voldoende is in (2) de volgorde der beide sommatieteekeken om te keeren, en dus te schrijven

$$\int_0^{\pi} B \sin \frac{R}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)}} d\theta =$$

$$= \pi \sum_0^{\infty} \left\{ \left( \frac{1}{2.4.6 \dots 2q} \right)^2 \left( \frac{a}{r} \right)^{2q} \sum_0^{\infty} \frac{(1.3.5 \dots (2q + 2p - 1))^2}{(2p + 1)!} \left( \frac{R}{r} \right)^{2p + 1} \right\} \dots (2'')$$

Dezelfde uitkomst vindt men ook door het eerste lid van (2'), in plaats van zooals boven eerst volgens de machten van  $\frac{a \sin \phi + R}{r}$ , daarentegen door middel van de reeks van TAYLOR rechtstreeks volgens de machten van  $\frac{a \sin \phi}{r}$  te ontwikkelen; en dus, stellende kort-

heidshalve  $\frac{R}{r} = x$ , uit te gaan van



$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B \sin \left( x + \frac{a}{r} \sin \phi \right) \cdot d\phi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_0^{\infty} \frac{d^q \cdot B \sin x}{dx^q} \cdot \frac{1}{q!} \left( \frac{a}{r} \right)^q \sin^q \phi \right\} d\phi,$$

als wanneer men, naarmate  $q$  oneven of even is, weder als boven beurtelings

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2q+1} \phi d\phi = 0 \quad \text{en} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2q} \phi d\phi = \frac{1.3.5 \dots (2q-1)}{2.4.6 \dots 2q} \pi$$

heeft te gebruiken, en dus vooreerst verkrijgt

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B \sin \left( x + \frac{a}{r} \sin \phi \right) \cdot d\phi =$$

$$= \pi \sum_0^{\infty} \frac{d^{2q} \cdot B \sin x}{dx^{2q}} \cdot \frac{1}{(2q)!} \left( \frac{a}{r} \right)^{2q} \cdot \frac{1.3.5 \dots (2q-1)}{2.4.6 \dots 2q} =$$

$$= \pi \sum_0^{\infty} \left( \frac{1}{2.4.6 \dots 2q} \right)^2 \left( \frac{a}{r} \right)^{2q} \cdot \frac{d^{2q} B \sin x}{dx^{2q}}.$$

Hierin komt verder, omdat

$$B \sin x = \sum_0^{\infty} \frac{1.3.5 \dots (2p-1)}{2.4.6 \dots 2p} \cdot \frac{x^{2p+1}}{2p+1} = \sum_0^{\infty} \frac{(1.3.5 \dots (2p-1))^2}{(2p+1)!} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

en in het algemeen

$$\frac{d^q \cdot \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}}{dx^q} = \frac{d^{q-1} \cdot \frac{x^{2p}}{(2p)!}}{dx^{q-1}} = \text{enz.} = \frac{x^{2p-q+1}}{(2p-q+1)!} \text{ is,}$$

$$\frac{d^{2q+1} B \sin x}{dx^{2q+1}} = \sum_0^{\infty} \frac{(1.3.5 \dots (2p-1))^2}{(2p-2q)!} \frac{x^{2p-2q}}{(2p-2q)!}$$

of, vervangende  $p-q$  door  $p$ ,

$$= \sum_0^{\infty} \frac{(1.3.5 \dots (2q+2p-1))^2}{(2p)!} \frac{x^{2p}}{(2p)!};$$

alsmede, wat thans meer bepaaldelijk van dienst is,

$$\frac{d^{2q} B \sin x}{dx^{2q}} = \sum_0^{\infty} \frac{(1.3.5 \dots (2p-1))^2}{(2p-2q+1)!} \frac{x^{2p-2q+1}}{(2p-2q+1)!}$$

of als zoo even

$$= \sum_0^{\infty} \frac{(1.3.5 \dots (2q+2p-1))^2}{(2p+1)!} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!};$$

en de substitutie van deze laatste waarde in de voorgaande integraal geeft nu, wegens  $x = \frac{R}{r}$ , werkelijk weder het tweede lid van (2'') terug.

Nu alzoo gebleken is dat de coëfficiënt van  $\left(\frac{1}{2.4.6..2q}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2$ , in (2'') gelijk is aan het  $(2q)^{\text{de}}$  differentiaal-quotient van de functie  $B \sin x$ , kan deze coëfficiënt ook op meer dan ééne wijze in eene eindige in plaats van eene oneindige reeks ontwikkeld worden. Daartoe kan men bijv. uitgaan van de formule

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{1-x \sin \phi} &= 2 \int_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} \frac{d \cdot Tg \frac{\phi}{2}}{1-2x Tg \frac{\phi}{2} + Tg^2 \frac{\phi}{2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \int_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} \frac{Tg \frac{\phi}{2} - x}{\frac{d \cdot \sqrt{1-x^2}}{(Tg \frac{\phi}{2} - x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \left[ B Tg \cdot \frac{Tg \frac{\phi}{2} - x}{\sqrt{1-x^2}} \right]_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

waaruit omgekeerd, stellende  $u = \frac{d \cdot B \sin x}{dx}$ , volgt

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{1-x \sin \phi},$$

zoodat hierdoor niet alleen  $u$  in den vorm van eene bepaalde integraal geschreven is, maar tevens, indien men de beide laatste leden na ontwikkeling volgens de opklimmende machten van  $x$  schrijft

$$\sum_0^{\infty} \frac{1.3.5..(2q-1)}{2.4.6..2q} x^{2q} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_0^{\infty} x^q \sin^q \phi d\phi,$$

door gelijkstelling der coëfficiënten van  $x^{2q+1}$  en van  $x^{2q}$  de beide bepaalde integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2q+1} \phi d\phi = 0 \text{ en } \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2q} \phi d\phi = \frac{1.3.5..(2q-1)}{2.4.6..2q} 2\pi$$

teruggevonden worden, in overeenstemming met de boven daarvoor tusschen de grenzen  $-\frac{\pi}{2}$  en  $\frac{\pi}{2}$  langs anderen weg verkregen waarden.

$$\text{Uit } \frac{d \cdot B \sin x}{dx} = u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1-x \sin \phi)^{-1} d\phi$$

komt verder, door  $n$ -maal volgens  $x$  te differentieeren, het differentiaal-quotient

$$\frac{d^{n+1} \cdot B \sin x}{dx^{n+1}} = \frac{d^n u}{dx^n} = \frac{n!}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - x \sin \phi)^{-(n+1)} \sin^n \phi d\phi,$$

dat is dus almede onder den vorm van eene bepaalde integraal, of ook ontwikkeld

$$\frac{d^{n+1} \cdot B \sin x}{dx^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_0^{\infty} \binom{n+p}{p} x^p \sin^{n+p} \phi d\phi;$$

zoodat men, daar hierin de termen met oneven exponent  $n+p$  bij integratie verdwijnen, vooreerst bij vervanging van  $n$  door  $2q$  en van  $p$  door  $2p$  verkrijgt

$$\begin{aligned} \frac{d^{2q+1} B \sin x}{dx^{2q+1}} &= \frac{(2q)!}{2\pi} \sum_0^{\infty} \left\{ \binom{2q+2p}{2p} x^{2p} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2q+2p} \phi d\phi \right\} = \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(2q+2p)!}{(2p)!} x^{2p} \cdot \frac{1.3.5..(2q+2p-1)}{2.4.6..(2q+2p)} = \sum_0^{\infty} (1.3.5..(2q+2p-1))^2 \frac{x^{2p}}{(2p)!}, \end{aligned}$$

als boven; en ten andere bij vervanging van  $n$  door  $2q-1$  en van  $p$  door  $2p+1$  verkrijgt

$$\begin{aligned} \frac{d^{2q} B \sin x}{dx^{2q}} &= \frac{(2q-1)!}{2\pi} \sum_0^{\infty} \left\{ \binom{2q+2p}{2p+1} x^{2p+1} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2q+2p} \phi d\phi \right\} = \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(2q+2p)!}{(2p+1)!} x^{2p+1} \cdot \frac{1.3.5..(2q+2p-1)}{2.4.6..(2q+2p)} = \sum_0^{\infty} (1.3.5..(2q+2p-1))^2 \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}, \end{aligned}$$

mede als boven.

Maar bovendien kunnen nu bijv. als volgt nog andere bepaalde integralen of ook eindige reeksen voor  $\frac{d^n u}{dx^n}$  gevonden worden. In verband met het voorgaande kan men gebruik maken van de dubbele identiteit

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} [1 - \{x + h(1-x^2)\}^2]^{-\frac{1}{2}} &= [1 - \{2hx + h^2(1-x^2)\}]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= (1-hx)^{-1} \left\{ 1 - \frac{h^2}{(1-hx)^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

waarin namelijk de tweede factor van het eerste lid, — zijnde de waarde die de functie  $u = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$  aanneemt, als men daarin de veranderlijke  $x$  doet aangroeien met  $h(1-x^2)$ , — te ontwikkelen is volgens de reeks van TAYLOR; terwijl op het tweede lid de ontwikkeling vol-

gens het binomium is toe te passen, waardoor dit lid aanvankelijk den vorm

$$\sum_0^{\infty} \frac{1.3.5..(2m-1)}{2.4.6..2m} \{2hx + h^2(1-x^2)\}^n$$

aanneemt, of, — als men de hierin bij herhaalde ontwikkeling voorkomende termen in  $h^n$ , die door geene andere waarden van den exponent  $m$  dan alleen  $m = n, n-1, n-2$ , enz.,  $\frac{n}{2}$  of  $\frac{n+1}{2}$  kunnen worden opgeleverd, bijeenbrengt, — den vorm

$$\sum_0^{\infty} \left\{ h^n \sum_n^{\frac{n}{2} \text{ of } \frac{n+1}{2}} \frac{1.3.5..(2m-1)}{2.4.6..2m} \binom{n}{n-m} (2x)^{n-m} (1-x^2)^{m-n} \right\},$$

waarin vervolgens nog de aanwijzer  $m$  door  $n-m$  kan worden vervangen; en terwijl eindelijk de tweede factor van het derde lid onder den vorm van eene bepaalde integraal kan worden geschreven door in de boven gevonden formule

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{1-x \sin \phi}$$

te vervangen  $x$  door  $\frac{h}{1-hx}$ . Voert men deze verschillende bewerkingen uit, dan gaat de voornoemde dubbele identiteit over in

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \sum_0^{\infty} \frac{d^n u}{dx^n} \cdot \frac{h^n (1-x^2)^n}{n!} &= \\ = \sum_0^{\infty} \left\{ h^n \sum_0^{\frac{n}{2} \text{ of } \frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5..(2n-2m-1)}{2.4.6..(2n-2m)} \binom{n-m}{m} (2x)^{n-2m} (1-x^2)^m \right\} &= \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{1-h(x+\sin \phi)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_0^{\infty} h^n (x+\sin \phi)^n \cdot d\phi, \end{aligned}$$

waarin namelijk het laatste lid slechts de ontwikkeling van het voorlaatste is volgens de opklimmende magten van  $h$ ; en de gelijkstelling der coëfficiënten van  $h^n$  in de beide eerste leden en in het

laatste geeft dan onmiddellijk bij deeling door  $\frac{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{n!}$  de formules

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{n!(2x)^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \sum_0^{\frac{n}{2} \text{ of } \frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5..(2n-2m-1)}{2.4.6..(2n-2m)} \binom{n-m}{m} \left(\frac{1-x^2}{4x^2}\right)^m =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!}{2\pi(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \sin \phi)^n d\phi = \\
&= \frac{n!}{2\pi(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_0^n \binom{n}{m} x^{n-m} \sin^m \phi d\phi = \\
&= \frac{n!}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \sum_0^{\frac{n}{2} \text{ of } \frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5..(2m-1)}{2.4.6..2m} \binom{n}{2m} x^{n-2m},
\end{aligned}$$

waarvan de voorlaatste door ontwikkeling van de voorgaande volgens het binomium, en de laatste door middel van de boven herhaaldelijk beschouwde bepaalde integraal  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^m \phi d\phi$  verkregen is.

Niet alleen zijn de eerste en de laatste van deze formules de beide eindige reeksen, die bij S. F. LACROIX, *Calcul différentiel et calcul intégral*, 2<sup>e</sup> Ed., T. 1, 1810, pag. 182—185, en T. 3, 1812, pag. 220—222 (zie ook voor de notatie pag. 120—122) langs ande-

ren weg voor  $\frac{d^n u}{dx^n}$  in het meer algemeene geval van  $u = (a + bx + cx^2)^r$  gevonden zijn, wanneer men aldaar  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = -1$ ,  $r = -\frac{1}{2}$ , dus  $p = a + bx + cx^2 = 1 - x^2$ ,  $q = b + 2cx = -2x$  en  $e = 4ac - b^2 = -4$  substitueert; maar tegelijkertijd is door de tweede van de vorenstaande formules, en door eene der reeds boven afgeleide, het differentiaal-quotient van eene willekeurige orde van  $B \sin x$  op twee verschillende wijzen in den vorm van eene bepaalde integraal verkregen, namelijk

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1} B \sin x}{dx^{n+1}} &= \frac{d^n \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{dx^n} = \\
&= \frac{n!}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^n \phi d\phi}{(1-x \sin \phi)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \sin \phi)^n d\phi.
\end{aligned}$$

Ten slotte zal thans nog worden aangewezen, hoe de bepaling van het evenbedoelde differentiaal-quotient  $\frac{d^n u}{dx^n}$ , niet alleen voor  $u = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ , maar ook in het meer algemeene geval van  $u = (a + bx + cx^2)^r$ , kan worden afhankelijk gemaakt van de integratie eener differentiaal-vergelijking. Daartoe in deze laatste vergelijking vervangende  $x$  door  $x + h$ , gaat zij over in

$$\sum_0^{\infty} \frac{d^n u}{dx^n} \cdot \frac{h^n}{n!} = \{(a + bx + cx^2) + (b + 2cx)h + ch^2\}^r,$$

en geeft dan door logarithmische differentiatie volgens  $h$ :

$$\frac{\sum_0^{\infty} \frac{d^n u}{dx^n} \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}}{\sum_0^{\infty} \frac{d^n u}{dx^n} \cdot \frac{h^n}{n!}} = \frac{(b+2cx)+2ch}{(a+bx+cx^2)+(b+2cx)h+ch^2},$$

zoodat, — door na verduijving der breuken de coëfficiënten van  $h^{n+1}$  in beide leden gelijk te stellen — komt door vermenigvuldiging met  $(n+1)!$

en door de notatie  $y = \frac{d^n u}{dx^n}$  in te voeren, de differentiaal-vergelijking

der tweede orde ter bepaling van  $y$ :

$$(a+bx+cx^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + (n-r+1)(b+2cx) \frac{dy}{dx} + (n+1)(n-2r)cy = 0.$$

Stelt men hierin nog  $y = e^{\int t dx}$ , dus  $\frac{dy}{dx} = te^{\int t dx}$  en  $\frac{d^2 y}{dx^2} =$

$$= \left( \frac{dt}{dx} + t^2 \right) e^{\int t dx}, \text{ dan gaat deze vergelijking na deeling door}$$

$e^{\int t dx}$  over in de differentiaal-vergelijking der eerste orde ter bepaling van de onbekende  $t$ :

$$(a+bx+cx^2) \frac{dt}{dx} + \{ (a+bx+cx^2)t^2 + (n-r+1)(b+2cx)t + (n+1)(n-2r)c \} = 0.$$

In het bijzonder geval eindelijk van  $u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  of  $y = \frac{1}{dx^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \frac{d^{n+1} B \sin x}{dx^{n+1}}, \text{ dat is voor } a = 1, b = 0, c = -1, r = \frac{1}{2},$$

nemen de twee gevonden differentiaal-vergelijkingen de meer eenvoudige vormen

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - (2n+3)x \frac{dy}{dx} - (n+1)^2 y = 0$$

$$\text{en } (1-x^2) \frac{dt}{dx} + \{ (1-x^2)t^2 - (2n+3)xt - (n+1)^2 \} = 0 \quad \text{aan.}$$

NASCHRIFT OVER HET VERBAND TUSSCHEN DE  
WORTELS EENER VERGELIJKING EN DIE  
VAN HARE AFGELEIDE,

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

Nadat mijne op blz. 1—14 opgenomen bijdrage over het genoemde onderwerp reeds was afgedrukt, verzocht Dr. LEGEBEKE mij mede te deelen, dat de Heer T. J. STIELTJES JR. te Leiden hem opmerkzaam maakte op eene in de *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, T. 78, 1874, pag. 140—144, 180—183, 271—274, voorkomende *Note de M. F. LUCAS, Propriétés géométriques des fractions rationnelles*, waar op pag. 273—274 de behandelde stelling reeds bewezen wordt, alsmede op eene in hetzelfde deel, pag. 278—280, geplaatste *Note de M. LAGUERRE, Sur la théorie des équations numériques*; terwijl LUCAS nogmaals in T. 89, 1879, pag. 224—226, *Sur une application de la Mécanique rationnelle à la théorie des équations*, op de zaak terugkomt. Ook vermeldt reeds C. F. GAUSS de bedoelde stelling, blijkens zijne *Werke*, 3<sup>er</sup> Band, 1866, Seite 112 (*Göttingische gelehrte Anzeigen*, 1816, März 2), „Bemerkung” na zijne „Anzeige” van het derde bewijs van het fundamenteel-theorema.

Behalve deze aanwijzingen van den Heer STIELTJES moge nog aangehaald worden: *Comptes rendus*, T. 78, 1874, pag. 431—433, *Note de M. F. LUCAS, Théorèmes concernant les équations algébriques*, alwaar voor het bewijs verwezen wordt naar eene later door hem aan de Fransche Akademie aan te bieden verhandeling, die ik evenwel niet gevonden heb; alsmede F. LUCAS, *Etudes analytiques sur la théorie générale des courbes planes*, 1864, vooral Livres I, II en VII, waar o. a. wordt opgemerkt dat voor ieder wortelpunt der afgeleide vergelijking (aldaar ook genoemd centraalpunt van de oorspronkelijke vergelijking) het product der afstanden tot de wortelpunten der oorspronkelijke vergelijking een maximum (of minimum) is.

Voor zoover in de aangehaalde stukken bewijzen van meergenoemde stelling voorkomen, heeft het door mij gegeven betoog daarmede in meerdere of mindere mate overeenkomst, terwijl daarentegen het bewijs van den Heer LEGEBEKE zich daarvan onderscheidt doordien het zuiver analytisch is.

---

# STOOMVERDEELINGS-SYSTEEM VAN GEBR. SULZER,

DOOR

L. JANSE Bz.

---

Op de wereldtentoonstelling te Parijs in 1878 hebben de gebroeders SULZER te Winterthur, eene stoommachine geleverd, die in vorm en inrichting zeer van de gewone machines verschilt. Niet alleen door den hellenden stand van den ketel, door het kleppen in plaats van het schuivensysteem, maar voornamelijk door het stoomverdeelingstelsel, de inrichting tot aan- en afvoer van den stoom, de „Steuerung”. Door de noodzakelijkheid gedrongen om aan de hooge-drukmachines met expansie eene groote snelheid te geven, veroorzaakte de vroeger door hen gebruikte „Steuerung” aan den cilinder zeer hinderlijke schokken, en hadden zij toen het vraagstuk op te lossen, om de beweging der kleppen zoo zacht mogelijk te maken, met behoud tevens van eene willekeurig te regelen expansie.

In hoeverre het kleppensysteem boven dat der schuiven de voorkeur verdient; en of de vervaardigers geslaagd zijn, om het beoogde doel op de eenvoudigste wijze te hebben bereikt, laten wij geheel in het midden; zelfs de toestel om de expansie te regelen, blijft geheel buiten beschouwing, — om ons uitsluitend bezig te houden met de kromme lijn, die het punt beschrijft, hetwelk de opening en sluiting der kleppen regelt.

Die kromme lijn wordt gezegd eene hartvormige gedaante te hebben, en wel, volgens de daarvan gegevene teekening, eene volkomen symmetrische. Men behoeft echter slechts vluchtig het samenstel



van krukken en stangen te beschouwen om overtuigd te worden, dat hier van symmetrie geene sprake kan zijn, maar wel van eene zeer ingewikkelde kromme lijn, die in zooverre een hartvorm heeft, dat zij van boven eenigsints hol, doch van onderen sterk gekromd is. Deze kromme lijn voldoet evenwel aan het praktische doel, hetwelk hierin bestaat, dat gedurende de eene helft van den zuigerslag (de op- of neergaande beweging van den zuiger) geen stoom mag toegelaten worden, maar dat gedurende de andere helft van den zuigerslag de stoomklep geopend worde. In het eerste geval moet het genoemde punt eene bijna horizontale beweging ontvangen, en doorloopt alsdan de boven- of vlakke zijde der kromme lijn; in het tweede geval moet dat punt ook tevens eene snelle vertikale beweging ontvangen, en het gekromde gedeelte der kromme volgen. Deze beide bewegingen, de horizontale en vertikale, ontstaan nu door de enkele rondgaande beweging van de drijfas der machine door middel van een stelsel van krukken en stangen, die om elkander en om vaste punten, en allen in evenwijdige vlakken, draaien.

Het kwam mij niet onbelangrijk voor, om de verschillende kromme lijnen, die enkele punten van dat stelsel, maar vooral die, welke den zoogenaamden hartvorm beschrijft, na te gaan, en te trachten van de laatste de vergelijking te bepalen. Deze beschouwing kan wellicht den weg aanwijzen, dien men heeft in te slaan, om andere samenstellingen te vervaardigen voor andere doeleinden dan het onderhavige.

#### *Beschrijving van het stangenstelsel.*

In fig. 1 stelt  $O_1$  het middelpunt van de drijfas der machine voor, die volgens de richting van het pijltje ronddraait. Om die as bevindt zich een excentriek, die dezelfde uitwerking doet, alsof daaraan eene kruk  $O_1P$  ware bevestigd, die het punt  $P$  rondvoert. Aan het punt  $P$  is als as beweegbaar eene stang  $PQ$ , verlengd tot  $R$ , die tijdens eene geheele omwenteling van  $P$  heen en weer gaat, doordien het punt  $Q$  om het vaste punt  $O_2$  door middel der kruk  $QO_2$  slingert, en dus een cirkelboog doorloopt; het uiteinde  $R$  van de stang  $PQR$  deelt in die heen- en weergaande beweging, maar ontvangt tevens eene op- en neergaande, zoodat het eene soort van ellips beschrijft. De beweging van het punt  $Q$  regelt de op- en neergaande beweging van het punt, dat den hartvorm beschrijft, en die van het punt  $R$  de heen- en weergaande of horizontale van datzelfde punt.

Aan de as R is een gebogen stang SRT bewegbaar; wiens eene uiteinde S aan eene kruk SO, bevestigd is, welke om het derde vaste punt O, draait, en wiens andere uiteinde T dientengevolge weder eene soort ellips beschrijft.

Het punt Q is verder door middel van eene stang QU verbonden aan eene kruk O<sub>1</sub>U, die om het vierde vaste punt O<sub>1</sub> heen en weer slingert, en, zooals reeds gezegd is, de verlangde op- en neergaande beweging doet ontstaan. Om nu de heen- en weergaande beweging te verkrijgen is aan het punt U als as beweegbaar een gebogen stang VW, waarvan het punt V verbonden is door middel van eene stang TV met het punt T, terwijl haar ander uiteinde W nu den hartvorm beschrijft, de kromme lijn, waarvan wij de vergelijking bepalen moeten.

De ingewikkelde bewegingen, die de onderscheidene punten van dit samenstel aannemen moeten, doen al spoedig inzien, dat eene rechtstreekse bepaling van de vergelijking tot geene bruikbare uitkomsten zou leiden, zoo het al niet onmogelijk is; en er blijft dus niets anders over dan de coördinaten van die kromme lijn voor eenige punten te zoeken, om daardoor tot eene algemeene vergelijking te geraken. Daar al de bewegingen afhangen van de ronddraaiende beweging van de drijf-as der machine, zoo ligt het voor de hand, de hoekbeweging dier as als onafhankelijk veranderlijke aan te nemen, en van deze de coördinaten  $x$  en  $y$  te doen afhangen. Wij nemen daartoe twaalf verschillende standen van die as aan, ieder van  $30^\circ$ , en noemen die  $t_0, t_1, t_2 \dots t_{11}$ , of  $\alpha = 0^\circ, \alpha = 30^\circ, \dots \alpha = 330^\circ$ . Voor elk van die standen of waarden van  $t$ , bepalen wij de bewegingen der punten Q, R, S, T, U, V en W, met opzicht tot een rechthoekig coördinatenstelsel YOX, waarvan YO of  $y$ -as vertikaal en evenwijdig met den zuigerstang der machine loopt.

De coördinaten der vaste punten zijn als volgt:

die van het punt O<sub>1</sub>:  $a_1 = 200, b_1 = 80,$

die van het punt O<sub>2</sub>:  $a_2 = 163, b_2 = 40,$

die van het punt O<sub>3</sub>:  $a_3 = 180, b_3 = 8,$

die van het punt O<sub>4</sub>:  $a_4 = 225, b_4 = 21\frac{1}{2},$

de coördinaten der punten in hunne initiale standen:

P<sub>0</sub>:  $x_0 = 200, y_0 = 90, T_0: x_0 = 131,34022, y_0 = 65.43734,$

Q<sub>0</sub>:  $x_0 = 145, y_0 = 64, U: x_0 = 60, y_0 = 240,$

R<sub>0</sub>:  $x_0 = 117.5, y_0 = 51, V: x_0 = 42.02412, y_0 = 231.23258,$

S<sub>0</sub>:  $x_0 = 120, y_0 = 8, \angle SRT = 120^\circ \quad \angle VUW = 90^\circ,$

de lengten der krukken en stangen:

$$O_1 P = r_1 = 10, \quad O_2 Q = r_2 = 30, \quad O_3 S = r_3 = 50, \\ O_4 U = r_4 = 48.02345, \quad RT = 20, \quad VU = UW = 20.$$

Uit de onderlinge initiale standen der genoemde punten volgen de lengten der stangen:

$$RQ = l_1 = 60.8358, \quad QR = \frac{1}{2} PQ = 30.4179 \text{ (aangenomen)} \\ RS = l_2 = 44.78, \quad QU = l_3 = 195.451, \quad TV = 188.3216.$$

De oorsprong van telling der hoeken wordt aangenomen in de  $y$ -as en gerekend naar de positieve zijde der  $x$ -as, dat is in de richting van het pijltje.

#### A. *Beweging van het punt Q.*

De plaatsen, die door het punt Q gedurende eene geheele omwenteling van het punt P worden ingenomen, worden gevonden door de voorwaarde, dat de beide uiteinden P en Q eener lijn PQ van standvastige lengte, zich voortdurend bewegen langs de omtrekken van twee cirkels, die uit  $O_1$  met  $O_1 P$ , en uit  $O_2$  met  $O_2 Q$ , als stralen, beschreven zijn.

De lengte dezer lijn PQ wordt uitgedrukt door de formule

$$l_1^2 = \{a_1 - (a_2 + r_2 \sin \beta_0)\}^2 + \{b_1 - (b_2 + r_2 \cos \beta_0)\}^2,$$

wanneer wij met  $\beta_0$  den hoek beteekenen, dien de kruk  $O_2 Q$  in zijnen initialen stand met de  $y$ -as maakt.

Stellen wij nu, dat het punt Q ergens in  $Q_1$  gekomen is, en de kruk  $QO_2$  een hoek  $QO_2 Y = \beta$  met de  $y$ -as maakt, als het punt P zich van  $P_0$  naar  $P_1$  bewogen en een hoek  $\alpha$  doorloopen heeft, dan zijn de coördinaten dezer punten

$$\text{van P: } a_1 + r_1 \sin \alpha \text{ en } b_1 + r_1 \cos \alpha,$$

$$\text{van Q: } a_2 + r_2 \sin \beta \text{ en } b_2 + r_2 \cos \beta;$$

en daar  $P_1 Q_1$  nu gelijk  $PQ = l_1$  moet zijn, heeft men

$$\{(a_1 + r_1 \sin \alpha) - (a_2 + r_2 \sin \beta)\}^2 + \{(b_1 + r_1 \cos \alpha) - (b_2 + r_2 \cos \beta)\}^2 = l_1^2, \\ \text{of}$$

$$\{(a_1 - a_2) + (r_1 \sin \alpha - r_2 \sin \beta)\}^2 + \{(b_1 - b_2) + (r_1 \cos \alpha - r_2 \cos \beta)\}^2 = l_1^2$$

$$\text{of stellende } (a_1 - a_2) = p, \text{ en } (b_1 - b_2) = q,$$

$$\{p^2 + 2p(r_1 \sin \alpha - r_2 \sin \beta) + (r_1^2 \sin^2 \alpha - 2r_1 r_2 \sin \alpha \cdot \sin \beta + r_2^2 \sin^2 \beta)\} + \\ + \{q^2 + 2q(r_1 \cos \alpha - r_2 \cos \beta) + \\ + (r_1^2 \cos^2 \alpha - 2r_1 r_2 \cos \alpha \cdot \cos \beta + r_2^2 \cos^2 \beta)\} = l_1^2,$$

$$\begin{aligned}
& 2p(r_1 \sin \alpha - r_2 \sin \beta) + r_1^2 \sin^2 \alpha + r_2^2 \sin^2 \beta - 2r_1 r_2 \sin \alpha \cdot \sin \beta + \\
& + 2q(r_1 \cos \alpha - r_2 \cos \beta) + r_1^2 \cos^2 \alpha + r_2^2 \cos^2 \beta - 2r_1 r_2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \\
& = l_1^2 - p^2 - q^2, \\
& - \sin \beta \cdot \{2pr_2 + 2r_1 r_2 \sin \alpha\} - \cos \beta \cdot \{2qr_2 + 2r_1 r_2 \cos \alpha\} = \\
& = l_1^2 - (p^2 + q^2 + r_1^2 + r_2^2) - 2r_1(p \sin \alpha + q \cos \alpha) = -A, \\
& \therefore \sin \beta + \cos \beta \frac{q + r_1 \cos \alpha}{p + r_1 \sin \alpha} = \\
& = \frac{-l_1^2 + (p^2 + q^2 + r_1^2 + r_2^2) + 2r_1(p \sin \alpha + q \cos \alpha)}{2r_2(p + r_1 \sin \alpha)} = B.
\end{aligned}$$

Stelt men nu den coëfficiënt van  $\cos \beta$ , of  $\frac{q + r_1 \cos \alpha}{p + r_1 \sin \alpha} = \text{Tang } \phi' =$   
 $= \frac{\sin \phi'}{\cos \phi'}$ , dan komt er

$$\sin \beta + \cos \beta \frac{\sin \phi'}{\cos \phi'} = B, \quad \sin(\beta + \phi') = B \cos \phi',$$

en  $\beta = -\phi' + \text{Boog } \sin(B \cos \phi').$

De hulphoek  $\phi'$  wordt in de figuur teruggevonden in den hoek  $P_1 O_2 A$ , dat is, den hoek, dien de lijn  $P_1 O_2$  met de as der abscissen maakt.

Stelt men evenwel  $\frac{q + r_1 \cos \alpha}{p + r_1 \sin \alpha} = \cot \phi = \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$ , dan heeft men

$$\sin \beta + \cos \beta \frac{\cos \phi}{\sin \phi} = B,$$

en  $\beta = \phi + \text{Boog } \cos(B \sin \phi);$

de hulphoek  $\phi$  stelt dan in de figuur den hoek  $P_1 O_2 B$  voor, of den hoek van  $P_1 O_2$  met de  $y$ -as.

Wanneer men nu, voor bepaalde waarden van  $\alpha$ , de hoeken  $\beta$  berekend heeft, dan vindt men de rechthoekige coördinaten van  $Q$  volgens deze formules

$$x_2 = a_2 + r_2 \sin \beta, \quad y_2 = b_2 + r_2 \cos \beta.$$

Voor de aangenomen standen van  $P$  vindt men

(Berekening A.)

<i>t</i>	<i>α</i>	<i>φ</i>	<i>Boog cos</i> ( <i>B Sin φ</i> )	<i>β</i>	Coördinaten van	
					<i>x,</i>	<i>y,</i>
0	0°	+ 36°30' 5"	- 73°22' 17"	- 36°52' 12"	145.	64.
1	30	40 47 54	69 48 52	29 0 58	148.44832	64.23452
2	60	45 25 2	70 6 23	24 41 21	150.46912	67.25758
3	90	49 36 0	74 12 15	24 36 15	150.50959	67.26718
4	120	52 31 43	81 31 21	28 59 38	148.45840	66.24010
5	150	53 16 13	90 59 56	37 43 43	144.64225	63.72757
6	180	50 57 52	100 43 40	49 45 48	140.09860	59.37838
7	210	44 35 40	107 12 10	61 36 30	136.60915	54.26617
8	240	38 49 50	106 37 12	67 37 22	135.25906	51.42103
9	270	34 1 10	99 1 10	65 21 43	135.73117	52.50643
10	300	32 12 6	89 30 46	57 18 40	137.75155	56.20236
11	330	33 19 46	80 15 57	46 58 10	141.08221	60.48442

Om den maximum- en minimumstand der as  $QO_2$  ten opzichte der  $y$ -as te vinden, doet men het eenvoudigst die uit de figuur af te leiden. Blijkens de figuur hebben die standen plaats, wanneer de punten  $Q$ ,  $P$  en  $O_1$  in dezelfde rechte lijn liggen. Noemt men voor die standen  $\angle QO_2Y = \beta'$  en  $\beta''$ , dan heeft men

$$\begin{aligned} \{a_1 - (a_2 - r_2 \sin \beta')\}^2 + \{b_1 - (b_2 + r_2 \cos \beta')\}^2 &= (l_1 \pm r_1)^2, \\ \{(a_1 - a_2) + r_2 \sin \beta'\}^2 + \{(b_1 - b_2) - r_2 \cos \beta'\}^2 &= (l_1 \pm r_1)^2, \\ p^2 + 2pr_2 \sin \beta' + r_2^2 \sin^2 \beta' + q^2 - 2qr_2 \cos \beta' + r_2^2 \cos^2 \beta' &= (l_1 \pm r_1)^2, \\ \sin \beta' \cdot 2pr_2 - \cos \beta' \cdot 2qr_2 &= (l_1 \pm r_1)^2 - (p^2 + q^2 + r_2^2) = A', \\ \sin \beta' - \cos \beta' \cdot \frac{q}{p} &= A' : 2pr_2 = B'; \text{ stel } \frac{q}{p} = \text{Tg } \phi'', \text{ dan is} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\beta' - \phi'') &= B' \cos \phi'', \\ \beta' &= \phi'' + \text{Boogsin}(B' \cos \phi''). \end{aligned}$$

De waarden van  $\beta$ , waarbij de stang  $PQ$  den cirkel  $O_1$  aanraakt, worden gevonden door te stellen

$$\begin{aligned} QO_1^2 &= QP^2 + PO_1^2, \\ \text{of } p^2 + 2pr_2 \sin \beta + r_2^2 \sin^2 \beta + q^2 - 2qr_2 \cos \beta + r_2^2 \cos^2 \beta &= l_1^2 + r_1^2, \\ \sin \beta \cdot 2pr_2 - \cos \beta \cdot 2qr_2 &= l_1^2 + r_1^2 - (p^2 + q^2 + r_2^2) = A'', \\ \sin \beta - \cos \beta \cdot \frac{q}{p} &= A'' : 2pr_2 = B''; \text{ voor } \frac{q}{p} = \text{Tg } \phi'' \text{ stellende, is} \\ \sin(\beta - \phi'') &= B'' \cos \phi'', \\ \beta &= \phi'' + \text{Boogsin}(B'' \cos \phi''). \end{aligned}$$

Zijn de coördinaten van  $\beta$ ,  $x_\beta$  en  $y_\beta$ , voor deze vier standen van den stang PQ berekend, dan kunnen de overeenkomstige waarden van  $\alpha$  gevonden worden door de volgende formules.

Voor de maximum- en minimumstanden

$$Tg \alpha_1 = \frac{a_1 - x_\beta}{b_1 - y_\beta} = Tg(\alpha_1 + 180^\circ);$$

en voor de beide aanrakingen

$$\alpha_1' = 180^\circ - Boog tg \frac{a_1 - x_\beta}{b_1 - y_\beta} - Boog tg \frac{l_1}{r_1},$$

$$\alpha_{11}' = 180^\circ + Boog tg \frac{a_1 - x_\beta}{b_1 - y_\beta} - Boog tg \frac{l_1}{r_1}.$$

Wij laten de uitgewerkte berekeningen voor deze vier gevallen hier volgen.

	Maximum.	Minimum.	Aanraking,	
			Boven.	Beneden.
$l_1^2$	+ 3701	+ 3701	+ 3701	$Log q = 1.6020600$
$2r_1 l_1^2$	+ 1216.716	+ 1216.716	— 1216.716	$Log p = 1.5682017$
$r_1^2$	+ 100	+ 100	+ 100	$Log tg \varphi = 0.0338583$
$p_2$	— 1369	— 1369	— 1369	$\varphi = 47^\circ 18' 52''$
$q_2$	— 1600	— 1600	— 1600	
$r_2^2$	— 900	— 900	— 900	
$A =$	+ 1148.716	— 1284.716	— 68	
$Log =$	3.0602128	3.1088071	1.8325089	
$Log 2pr_1 =$	3.3463530	3.3463530	3.3463530	
$Log B =$	9.7138593	9.7624541	8.4861559	
$Log Cos \varphi =$	9.8318973	9.8318973	9.8318973	
$Log Sin(\beta - \varphi) =$	9.5457571	1.5943514	8.3180532	
$\beta - \varphi =$	20° 34' 15''	— 23° 8' 20''	— 1° 11' 31''	
$\varphi =$	47 13 52	47 13 52	47 13 52	
$\beta =$	67° 48' 7''	24° 5' 32''	46° 2' 21''	
Coördin. van Q				
$a_2$	163.	163.	163.	
$r_2 Sin \beta$	27.77510	12.24620	21.59444	
$x_\beta$	135.22490	150.75380	141.40556	
$b_2$	40.	40.	40.	
$r_2 Cos \beta$	11.33617	27.38668	20.82500	
$y_\beta$	51.33617	67.38668	60.82500	
$Tg \alpha = \frac{a_1 - x_\beta}{b_1 - y_\beta}$				
$a_1 - x_\beta =$	64.77510	49.24620	58.59444	
$Log(a_1 - x_\beta) =$	1.8114071	1.6923728	1.7678564	
$b_1 - y_\beta =$	28.66383	12.61332	19.17560	
$Log(b_1 - y_\beta) =$	1.4573343	1.1008295	1.2827354	
$Log tg \alpha =$	0.3540728	0.5915483	0.4851210	
$\alpha =$	246° 7' 48''	75° 38' 2''	71° 52' 46''	251° 52' 46''

B. *Beweging van het punt R.*

Daar het eene uiteinde P van de stang PQ een geheelen cirkel beschrijft, terwijl zijn ander uiteinde Q slechts een cirkelboog doorloopt, zoo zullen alle andere punten van die stang geslotene kromme lijnen beschrijven, die de gedaanten van ellipsen hebben, doch reeds zeer ingewikkelde kromme lijnen zijn.

Om de kromme te bepalen, die elk willekeurig punt R, in de lijn PQ gelegen, beschrijft, zoo moeten wij de vergelijking zoeken der lijn, die door twee gegeven punten P en Q gaat, wier coördinaten bekend zijn.

Die coördinaten worden uitgedrukt

$$\text{voor P, door } x, = a_1 + r_1 \sin \alpha, \quad y, = b_1 + r_1 \cos \alpha,$$

$$\text{voor Q, door } x, = a_2 + r_2 \sin \beta, \quad y, = b_2 + r_2 \cos \beta.$$

Voor eenig willekeurig punt R in de lijn PQ benoemen wij de coördinaten door  $x_r$  en  $y_r$ , en de loopende coördinaten door  $x$  en  $y$ .

Het punt R zal in de rechte lijn PQ liggen, indien zijne coördinaten voldoen aan de vergelijking der rechte lijn, die door P en Q gaat. De vergelijking der rechte lijn, die door P en Q gaat, wier ordinaten zijn  $(x_r, y_r)$ ,  $(x_q$  en  $y_q)$ , wordt uitgedrukt door

$$y - y_r = \frac{y_r - y_q}{x_r - x_q} (x - x_r).$$

Stelt men nu hierin de coördinaten van het punt Q voor de loopende in de plaats, dan verkrijgt men

$$y_r - y_r = \frac{y_r - y_q}{x_r - x_q} (x_r - x_r), \quad \text{of wel} \quad \frac{y_r - y_q}{x_r - x_q} = \frac{y_r - y_r}{x_r - x_r}, \quad \dots (1)$$

voor de voorwaarde, die er tusschen de coördinaten der drie punten P, Q en R moet bestaan.

De afstand der punten  $(x_r, y_r)$  en  $(x_r, y_r)$  is

$$PR = \sqrt{(x_r - x_r)^2 + (y_r - y_r)^2},$$

en die der punten  $(x_r, y_r)$  en  $(x_q, y_q)$ ,

$$QR = \sqrt{(x_r - x_q)^2 + (y_r - y_q)^2}$$

Verdeelen wij nu de lijn PQ door het punt R in reden van  $n$  tot  $m$ , zoodat

$$PR : QR = n : m \text{ is, zoo moet}$$

$$m \sqrt{(x_r - x_r)^2 + (y_r - y_r)^2} = n \sqrt{(x_r - x_q)^2 + (y_r - y_q)^2} \text{ zijn,}$$

$$\text{of } m(x_r - x_s) \sqrt{1 + \left(\frac{y_r - y_s}{x_r - x_s}\right)^2} = n(x_r - x_s) \sqrt{1 + \left(\frac{y_r - y_s}{x_r - x_s}\right)^2}.$$

Daar nu, volgens (1),  $\frac{y_r - y_s}{x_r - x_s} = \frac{y_r - y_s}{x_r - x_s}$  is, zoo vallen de wortelteekens weg, en men behoudt

$$m(x_r - x_s) = \pm n(x_r - x_s),$$

$$\text{of } x_r(m \mp n) = m x_s \mp n x_s,$$

$$\text{en } x_r = \frac{m x_s \pm n x_s}{m \pm n}.$$

$$\text{Nu is, volgens (1), } x_r - x_s = \frac{y_r - y_s}{y_r - y_s} (x_r - x_s),$$

$$\text{dus } m \frac{y_r - y_s}{y_r - y_s} (x_r - x_s) = \pm n (x_r - x_s),$$

$$m(y_r - y_s) = \pm n(y_r - y_s),$$

$$y_r(m \mp n) = m y_s \mp n y_s,$$

$$y_r = \frac{m y_s \pm n y_s}{m \pm n}.$$

Wij verkrijgen alzoo, zooals bekend is, twee deelpunten R' en R, die òf tusschen de punten P en Q, òf in hun verlengde liggen.

Nemen wij  $n = m$ , dat is, R' midden tusschen P en Q, dan heeft men

$$\left. \begin{aligned} x'_r &= \frac{1}{2}(x_s + x_s), \text{ of } = \infty, \\ y'_r &= \frac{1}{2}(y_s + y_s), \text{ of } = \infty, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Stellen wij  $n = 3$  en  $m = -1$ , voor een punt R, gelegen op een afstand van Q, gelijk de halve lengte van PQ; dan vindt men

$$\left. \begin{aligned} x_r &= \frac{-x_s \pm 3x_s}{-1 \pm 3}, \text{ dat is } \delta f = \frac{1}{2}(3x_s - x_s) \text{ of } = \frac{1}{2}(x_s + 3x_s); \\ y_r &= \frac{-y_s \pm 3y_s}{-1 \pm 3}, \text{ dat is } \delta f = \frac{1}{2}(3y_s - y_s) \text{ of } = \frac{1}{2}(y_s + 3y_s). \end{aligned} \right\} (3)$$

Ter berekening van de coördinaten der krommen, die de genoemde punten R en R' zullen doorloopen, moeten dus, voor elk der gekozen standen  $\alpha$  des drijfz, de overeenkomstige rechthoekige coördinaten van P en ook van Q berekend en achtereenvolgens in de formules (2) en (3) ingevoerd worden.

Het heeft geen nut den aard der krommen, die door R en R' beschreven worden, in bijzonderheden na te gaan, zoodat wij die buiten beschouwing laten.



De berekende coördinaten van R en R' zijn hier in een tafel verenigd.

(Berekening B.)

$t$	$\alpha$	$R. \quad m = n.$		$R'. \quad m = 3, \quad n = -1.$	
		$x_r$	$y_r$	$x'_r$	$y'_r$
0	0°	172.5	77.	117.5	51.
1	30	176.72416	77.44744	120.17248	55.02175
2	60	179.56468	76.12879	121.37355	58.38637
3	90	180.25480	73.63809	120.76438	60.91427
4	120	178.55933	70.62005	118.35747	60.86015
5	150	174.82113	67.53366	114.46338	59.92148
6	180	170.04930	64.68419	110.14790	54.06757
7	210	165.80457	62.80296	107.41372	45.72438
8	240	163.29940	63.21051	107.21871	39.63154
9	270	162.86558	66.25322	108.59675	38.75964
10	300	164.54565	70.60118	110.95745	41.80356
11	330	168.04110	74.57383	113.87668	46.39650

Aan het punt R' is eene stang verbonden, die de uitlaatklep regelt, en aan het punt R is als as een gebogen stang SRT bevestigd, wier beweging wij nu moeten beschouwen.

C. *Beweging van het punt T.*

Alle punten van den gebogen stang SRT zouden gelijke en gelijkvormige kromme lijnen als het punt R beschrijven, indien niet zijn eene uiteinde aan eene andere kruk SO<sub>3</sub> verbonden ware, die, zelf om het vaste punt O<sub>3</sub> draaiende, aan de stang SRT bovendien nog eene draaiends beweging gaf, welke veroorzaakt, dat het andere uiteinde T dier stang eene gewijzigde, doch ook geslotene, kromme lijn beschrijven moet.

Om de coördinaten van die kromme te vinden, moeten wij eerst de beweging van het punt S bepalen, welker stang SO<sub>3</sub>, om het vaste punt O<sub>3</sub> slingerende, op een gegeven en standvastigen afstand van het R blijft, wiens coördinaten bekend zijn.

Wij beschouwen dus wederom eene lijn SR van eene standvastige lengte, wier eene uiteinde eene bekende kromme lijn, en wier ander uiteinde een cirkelboog doorloopt.

De coördinaten der initiale punten zijn

$$\text{van } R_0, \quad x_0 = 117.5, \quad y_0 = 51,$$

$$\text{van } S_0, \quad x'_0 = 130, \quad y_0 = 8,$$

en de hoek, dien de stang SR met de  $y$ -as maakt, wordt dus uitgedrukt door

$$\text{Tang YSR} = \frac{x_0 - x'_0}{y_0 - y'_0} = \frac{117.5 - 130}{51 - 8} = -\frac{12.5}{43};$$

$$\text{dus de hoek YSR} = -16^\circ 12' 39''$$

$$\text{Hoek SRT der gebogen stang} = 120$$

$$\text{dus hoek RT met de } y\text{-as} = \theta_0 = -43^\circ 47' 27'';$$

en de lengte RS der stang

$$l_2 = \sqrt{12.5^2 + 43^2} = \sqrt{2005.25} = 44.78.$$

De coördinaten van R noemen wij  $x_r$  en  $y_r$ , en die van S  $a_3 + r_3 \sin \gamma$  en  $b_3 + r_3 \cos \gamma$ ; wij mogen dan weder stellen

$$\{x_r - (a_3 + r_3 \sin \gamma)\}^2 + \{y_r - (b_3 + r_3 \cos \gamma)\}^2 = l_2^2,$$

$$\{(x_r - a_3) - r_3 \sin \gamma\}^2 + \{(y_r - b_3) - r_3 \cos \gamma\}^2 = l_2^2,$$

$$p'^2 - 2p'r_3 \sin \gamma + r_3^2 \sin^2 \gamma + q'^2 - 2q'r_3 \cos \gamma + r_3^2 \cos^2 \gamma = l_2^2,$$

$$-\sin \gamma \cdot 2p'r_3 - \cos \gamma \cdot 2q'r_3 = l_2^2 - (p'^2 + q'^2 + r_3^2) = -A'',$$

$$\text{of} \quad \sin \gamma + \cos \gamma \cdot \frac{q'}{p} = A'' : 2p'r_3 = B'';$$

stellende nu  $\frac{q'}{p} = \frac{y_r - b_3}{x_r - a_3} = \cot \psi = \cot \angle YO_3S$ , dan heeft men

$$\cos(\gamma - \psi) = B'' \sin \psi,$$

$$\gamma = +\psi + \text{Boog} \cos(B'' \sin \psi).$$

Uit de bekend geworden hoeken  $\gamma$  der kruk  $O_3S$  berekent men de coördinaten van S volgens de formules

$$x_s = a_3 + r_3 \sin \gamma \quad \text{en} \quad y_s = b_3 + r_3 \cos \gamma.$$

Betekent men verder door  $x$ , en  $y$ , de coördinaten van het punt T, zoo vindt men vooreerst de achtereenvolgende hoeken van RT met de  $y$ -as door

$$\angle RTY = \theta = \angle SRT + \angle SRY,$$

$$\text{en} \quad \text{Tang SRY} = \frac{x_r - x_s}{y_r - y_s};$$

en eindelijk de coördinaten van het punt T, gedurende eene geheele omwenteling van de drijfas der machine,

$$x_t = x_r + RT \sin RTY = x_r + RT \sin \theta,$$

$$y_t = y_r + RT \cos RTY = y_r + RT \cos \theta.$$

De uitkomsten van de berekeningen der hiervoren genoemde groot-heden volgen hier in deze tafel.

(Berekening C.)

$t$	$\alpha$	$\angle YO_3S$	Coördinaten van S.		$\angle YSR$	Coördinaten van T.	
			$x_1$	$y_1$		$x_1$	$y_1$
0	0°	90° 0' 0"	130.	8.	-16° 12' 33"	131.34022	65.43734
1	30	86 8 52	130.11300	11.35859	12 49 32	134.79602	68.61713
2	60	82 29 37	130.42845	14.53205	11 42 41	136.26909	71.69397
3	90	79 17 14	130.87135	17.29430	13 2 44	135.38060	74.56585
4	120	77 19 46	131.21765	18.96725	16 9 49	132.16771	76.32679
5	150	78 3 56	131.08055	18.33960	21 46 59	126.83604	75.63464
6	180	82 58 28	130.37545	14.11560	26 51 11	121.08374	70.81295
7	210	91 4 6	130.00870	7.06275	30 18 11	117.32196	63.09754
8	240	97 38 55	130.44185	1.35955	32 15 8	116.83781	57.16644
9	270	99 20 14	130.67670	-0.19735	29 32 37	118.73443	55.99994
10	300	97 29 45	130.42725	1.46319	25 45 50	123.20953	58.33808
11	330	93 19 52	130.08450	5.09470	21 25 51	126.34594	62.03356

#### D. *Beweging van het punt U.*

De beide stangen QU en TV werken nu te samen om het punt W de begeerde kromme lijn te doen beschrijven. De stang QU doet het punt U om het vaste punt O<sub>1</sub> draaien, voert met zich de gebogen stang VUW; terwijl de laatste, door middel der stang TV, eene tweede beweging ontvangt.

Allereerst moeten wij nu de coördinaten van het punt U kennen, dat door QU bewogen wordt. Hier hebben wij dus wederom eene lijn QU van eene bekende en onveranderde lengte, wier einden zich langs cirkelbogen QO<sub>1</sub> en UO<sub>1</sub> bewegen.

Voor de initiale standen hebben wij

$$\text{voor } QO_1, \quad x_0 = 145, \quad y_0 = 64,$$

$$\text{voor } UO_1, \quad x'_0 = 60, \quad y'_0 = 240.$$

Voorts is

$$\text{Tang } UQY = \frac{x_0 - x'_0}{y_0 - y'_0} \quad \text{en} \quad QU = (y_0 - y'_0) \text{Sec } UQY,$$

$$x_0 - x'_0 = 85, \text{ Log} = 1.9294189$$

$$y_0 - y'_0 = -176, \text{ Log} = 2.2455127 \quad = 2.2455127$$

$$\text{Log tang } UQY = 9.6889062$$

$$UQY = 25^\circ 46' 43'', \text{ Log sec} = 0.0455253$$

$$2 \text{ Log } QU = 4.5820760$$

$$\text{Log } QU = 2.2910380$$

$$QU^2 = l_1^2 = 38205.00$$

$$QU = l_1 = 195,4810.$$

Om de coördinaten van het punt U te berekenen, stellen wij die van Q en U voor, door

$$\text{van } Q, \quad x_1, \quad y_1,$$

$$\text{van } U, \quad x_u = a_1 + r_1 \sin \delta, \quad y_u = b_1 + r_1 \cos \delta,$$

en wij hebben wederom de vergelijking

$$\{x_1 - (a_1 + r_1 \sin \delta)\}^2 + \{y_1 - (b_1 + r_1 \cos \delta)\}^2 = l_2^2,$$

$$\{(x_1 - a_1) - r_1 \sin \delta\}^2 + \{(y_1 - b_1) - r_1 \cos \delta\}^2 = l_2^2,$$

$$p''^2 - 2p''r_1 \sin \delta + r_1^2 \sin^2 \delta + q''^2 - 2q''r_1 \cos \delta + r_1^2 \cos^2 \delta = l_2^2;$$

$$- \sin \delta \cdot 2p''r_1 - \cos \delta \cdot 2q''r_1 = l_2^2 - (p''^2 + q''^2 + r_1^2) = -A^{IV},$$

$$\sin \delta + \cos \delta \cdot \frac{q''}{p''} = A^{IV}; 2p''r_1 = B^{IV},$$

$$\cos(\delta - \chi) = B^{IV} \sin \chi, \quad \delta = \chi + \text{Boog cos}(B^{IV} \sin \chi).$$

$$\left[ \text{stellende } p'' = x_1 - a_1, \quad q'' = y_1 - b_1, \quad \frac{q''}{p''} = \cot \chi. \right]$$

Met de bekend geworden hoeken  $\delta$  berekent men verder de coördinaten van U door de formules

$$x_u = a_1 + r_1 \sin \delta \quad \text{en} \quad y_u = b_1 + r_1 \cos \delta.$$

(Berekening D.)

t	$\alpha$	$\angle V_1 UY = \delta.$	Coördinaten van U.	
			$x_u$	$y_u$
0	0°	51° 20' 26''	60.	240.
1	30	50 49 17	59.72690	240.33815
2	60	50 35 5	59.60119	240.40184
3	90	50 32 3	59.57427	240.52458
4	120	50 48 54	59.72344	240.34250
5	150	51 28 49	60.05584	239.93008
6	180	53 52 49	61.29272	238.30860
7	210	57 44 33	63.11141	235.63132
8	240	60 8 45	64.56138	233.90524
9	270	59 15 33	63.27558	234.54746
10	300	56 11 53	62.40582	236.71661
11	330	53 9 42	60.93462	238.79272

E. *Beweging der punten V en W.*

De beweging, die het punt V, en tegelijk ook het punt W, ondergaat, leidt tot eene andere wiskundige beschouwing, dan wij tot hertoe gebezigd hebben. Het punt V namelijk wordt vooreerst door het punt U medegevoerd, en zou, alleen daaraan gehoorzamende, den omtrek van een cirkelboog, uit  $O_4$  beschreven, doorloopen; doch ten anderen moet het de beweging volgen, die de stang TV aan hetzelfde mededeelt; zoodat uit die gelijktijdige tweeledige bewegingen de meetkundige plaats van dat punt bepaald wordt.

Wij hebben nu hier te doen met een veranderlijken scheefhoekigen driehoek TUV, wiens opstaande zijden bekende en standvastige lengten hebben, doch wiens basis veranderlijk is, en waarvan de uiteinden altijd blijven moeten op twee bekende kromme lijnen. Uit deze gegevens zijn nu de hoeken te berekenen, die de kruk UV met de as der Y maakt. Die hoek UVY bestaat in elk der beschouwde gevallen uit twee veranderlijke hoeken TUY en TVY; de eerste is de stand van de stang TU ten opzichte van de Y-as, en de laatste de hoek van den zoo even gemelden driehoek TUV, gelegen tegenover de standvastige zijde TV.

Bepalen wij eerst den initialen driehoek  $T_0 U_0 V_0$ .

De coördinaten van

$$T_0 \text{ zijn } x_{,0} = 131,34022, y_{,0} = 65,43734,$$

$$U_0 \text{ zijn } x_{,0} = 60, \quad y_{,0} = 240.$$

$$U_0 V_0 = 20, \angle Y_0 U_0 V_0 = -116^\circ = 64^\circ.$$

Hieruit volgt onmiddellijk

$$Tg T_0 U_0 Y_0 = \frac{x_{,0} - x_{,0}}{y_{,0} - y_{,0}}, \text{ en } T_0 U_0 = (y_{,0} - y_{,0}) \sec T_0 U_0 Y_0,$$

$$x_{,0} - x_{,0} = 71.34022, \text{ Log} = 1.8533344,$$

$$y_{,0} - y_{,0} = 174.56266, \text{ Log} = 2.2419514 \quad = 2.2419514,$$

$$\text{Log } Tg T_0 U_0 Y_0 = 9.6113830,$$

$$\angle T_0 U_0 Y_0 = 22^\circ 13' 44''; \text{ Log sec} = 0.0335083,$$

$$2 \text{ Log } T_0 U_0 = 4.5509194 \quad \text{Log } T_0 U_0 = 2.2754597,$$

$$(T_0 U_0)^2 = 35556.53 \quad T_0 U_0 = 188.5644.$$

Uit  $U_0 V_0$  en  $\angle Y_0 U_0 V_0$  vinden wij voor de coördinaten van  $V_0$   
 $x_{,0} = x_{,0} - U_0 V_0 \sin Y_0 U_0 V_0 = 60 - 20 \sin 64^\circ = 42.02412,$   
 $y_{,0} = y_{,0} - U_0 V_0 \cos Y_0 U_0 V_0 = 240 - 20 \cos 64^\circ = 231.23258;$

$$\begin{aligned} \text{en } (T_o V_o)^2 &= \{(x_{,o} - x_{,o})^2 + (y_{,o} - y_{,o})^2\} = \\ &= \{(131.34022 - 42.02412)^2 + (65.43734 - 231.23258)^2\} = \\ &= \{89.31610^2 + 165.79524^2\} = 35465, \end{aligned}$$

$$\text{en } T_o V_o = \sqrt{35465} = 188.3216.$$

In den scheefhoekigen driehoek TUV hebben wij verder

$$\begin{aligned} TV^2 &= TU^2 + UV^2 - 2TU \cdot UV \cdot \cos TUV, \\ \text{of } \cos TUV &= \{TU^2 + (VU^2 - TV^2)\} : 2TU \cdot UV. \end{aligned}$$

$$TU^2 = 35556.53,$$

$$VU^2 - TV^2 = -35065.00,$$

$$TU^2 + (VU^2 - TV^2) = +491.53; \text{ Log} = 2.6915.500,$$

$$2TU \cdot UV = 7542.575; \text{ Log} = 3.8775197,$$

$$\text{Log } \cos TUV = 8.8140303,$$

$$\angle TUV = 86^\circ 15' 48'',$$

$$\angle TUY = 22 \ 13 \ 44,$$

$$\angle VUY = 64 \ 2 \ 4,$$

$$\angle VWU = 90,$$

$$\angle WUY = 25^\circ 57' 56''.$$

Eindelijk verkrijgen wij de coördinaten van  $W_o$  door

$$x_o = 60 + 20 \times 0.487831 = 68.746620;$$

$$\text{en } y_o = 240 - 20 \times 0.899057 = 222.01886.$$

Stellen wij nu, om de coördinaten van  $W$  voor de overige waarden van  $t$  te berekenen, de coördinaten van

$$T = x, \text{ en } y, \text{ en die van } U = x_u \text{ en } y_u,$$

dan berekent men daaruit eerst den afstand  $TU$  en  $\angle TUY$ , en vervolgens uit den scheefhoekigen driehoek  $TUV$ , waarin  $TU$  veranderlijk doch  $TV$  en  $UV$  standvastig zijn, den hoek  $TUV$ , en met dezen in de driehoeken  $TUY$  en  $VUW$  de hoeken  $VUY$  en  $WUY$ ; en, deze laatste gevonden hebbende, met den straal  $UW$ , de coördinaten  $x$  en  $y$  van het punt  $W$ .

Deze bewerkingen uitvoerende, verkrijgen wij  
(Berekening E.)

$t$	$\alpha$	TU	$\angle TUV$	$\angle WUY$	Coördinaten van W.	
					$x$	$y$
0	0°	188.54300	86°15'48"	+25°57'56"	68.74662	221.95598
1	30	187.41240	89 33 14	+24 3 32	67.88051	222.07559
2	60	186.39330	95 22 21	+19 3 18	66.13069	221.58774
3	90	182.45230	104 5 8	+10 27 52	63.20677	220.85722
4	120	179.30150	113 59 24	- 0 9 36	59.66858	220.34258
5	150	177.34900	120 36 42	- 8 29 30	57.10252	220.14952
6	180	177.84710	118 52 33	- 9 13 51	58.08448	218.56760
7	210	180.85380	109 0 51	- 1 34 18	62.56287	215.63886
8	240	184.30800	98 32 47	+ 7 55 51	67.32094	214.09654
9	270	186.96200	90 50 40	+16 24 38	68.92584	215.36222
10	300	188.45710	86 34 10	+22 15 12	69.97988	218.20623
11	330	188.46900	86 32 4	+23 46 25	68.99710	220.48982

De aldus gevondene coördinaten zijn die van twaalf punten van de verlangde kromme lijn, die bij elke omwenteling der drijfas door het punt W beschreven wordt. De plaats dier punten is op eene grootere schaal aangewezen in figuur 2, ten opzichte van een ander rechthoekig coördinatenstelsel, evenwijdig aan het eerste, doch waarvan de abscissen met 57, en de ordinaten met 214 verminderd zijn. Wij zien uit de figuur, dat de bovenzijde dier kromme lijn van  $t = 0$  tot  $t = 5$  bijna een cirkelboog doorloopt, maar dat zij van onder zeer sterk gekromd is; van  $t = 5$  tot  $t = 8$ , daalt het punt W, om van  $t = 8$  tot  $t = 0$  wederom spoedig te rijzen, eene beweging die aan het praktische doel beantwoordt. Ofschoon de twaalf berekende punten der kromme lijn voldoende kunnen geacht worden, om door de constructie dier punten den loop der kromme ten naastenbij en in het algemeen aan te geven, kan het wel eens de vraag zijn, om de overige punten dier kromme te bepalen, waartoe wij nu zullen overgaan.

#### F. *Algemeene vergelijking der kromme.*

De eenvoudigste weg om zoovele punten der kromme te vinden als men wil, zou wel deze zijn, om de waarden van  $x$  en  $y$  te beschouwen als algemeene leden van rekenkundige reeksen van hoogere orde, om dan door interpolatie-formulen een willekeurig aantal tuss-

schentermen te berekenen. Deze methode moet dan aangewend worden, wanneer men de analytische uitdrukking niet kent, maar, zooals in ons geval, slechts eenige numerieke waarden voor gelijke op elkander volgende waarden der onafhankelijk veranderlijke. Daar echter uit de twaalf gegebene waarden slechts één verschil van de elfde orde voorkomen kan, zou de interpolatie op deze wijze nog al bezwarend worden voor waarden, die niet aan het begin of einde of in het midden der reeks vallen.

Op eene andere wijze kan men de vergelijking der kromme voorstellen als eene parabolische kromme lijn, van den  $(n-1)^{\text{ste}}$  graad, met onbepaalde coëfficiënten, om dan uit de  $n$  bekende waarden die coëfficiënten te zoeken. Heeft men die gevonden, dan kan men, tusschen elken term, één term in het midden berekenen, en men heeft alsdan gegevens genoeg om door achtereenvolgende interpolatiën zoo veel termen te vinden als men verkiest. Dezen weg inslaande, zoeken wij eerst de achtereenvolgende reeksen van verschillen van elke orde voor de twaalf gegebene coördinaten van  $x$  en van  $y$  afzonderlijk.

Wij verkrijgen alsdan voor de eerste termen der reeksen van verschillen als volgt. Coördinaten van fig. 2.

(Berekening F)

$x_0$	$= +11.74662$
$\Delta_1 = x_1 - x_0$	$= - 0.86611$
$\Delta_2 = x_2 - 2x_1 + x_0$	$= - 0.88371$
$\Delta_3 = x_3 - 3x_2 + 3x_1 - x_0$	$= - 0.29039$
$\Delta_4 = x_4 - 4x_3 + 6x_2 - 4x_1 + x_0$	$= + 0.85022$
$\Delta_5 = x_5 - 5x_4 + 10x_3 - 10x_2 + 5x_1 - x_0$	$= + 0.17635$
$\Delta_6 = x_6 - 6x_5 + 15x_4 - 20x_3 + 15x_2 - 6x_1 + x_0$	$= - 0.21343$
$\Delta_7 = x_7 - 7x_6 + 21x_5 - 35x_4 + 35x_3 - 21x_2 + 7x_1 - x_0$	$= - 3.36646$
$\Delta_8 = x_8 - 8x_7 + 28x_6 - 56x_5 + 70x_4 - 56x_3 + 28x_2 - 8x_1 + x_0$	$= + 10.02564$
$\Delta_9 = x_9 - 9x_8 + 36x_7 - 84x_6 + 126x_5 - 126x_4 + 84x_3 - 36x_2 + 9x_1 - x_0$	$= - 16.27737$
$\Delta_{10} = x_{10} - 10x_9 + 45x_8 - 120x_7 + 210x_6 - 252x_5 + 210x_4 - 120x_3 + 45x_2 - 10x_1 + x_0$	$= + 21.93711$
$\Delta_{11} = x_{11} - 11x_{10} + 55x_9 - 165x_8 + 330x_7 - 462x_6 + 462x_5 - 330x_4 + 165x_3 - 55x_2 + 11x_1 - x_0$	$= - 46.49721$
en voor de ordinaten $y$ en hare verschillen	
$y_0$	$= + 7.95598$
$\Delta_1 = y_1 - y_0$	$= + 0.11961$
$\Delta_2 = y_2 - 2y_1 + y_0$	$= - 0.60746$
$\Delta_3 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$	$= + 0.36479$
$\Delta_4 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$	$= + 0.09376$
$\Delta_5 = y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0$	$= - 0.44661$
$\Delta_6 = y_6 - 6y_5 + 15y_4 - 20y_3 + 15y_2 - 6y_1 + y_0$	$= - 1.01668$



$$\begin{aligned}
\Delta_7 &= y_7 - 7y_6 \dots\dots\dots - y_0 &= + 6.04851 \\
\Delta_8 &= y_8 - 8y_7 \dots\dots\dots + y_0 &= -13.71040 \\
\Delta_9 &= y_9 - 9y_8 \dots\dots\dots - y_0 &= +19.06053 \\
\Delta_{10} &= y_{10} - 10y_9 \dots\dots\dots + y_0 &= -14.49413 \\
\Delta_{11} &= y_{11} - 11y_{10} \dots\dots\dots - y_0 &= - 7.17516
\end{aligned}$$

Wij nemen nu voor de vergelijking der parabolische kromme de volgende formule

$$\left. \begin{aligned} x &= a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5 + gt^6 + ht^7 + it^8 + kt^9 + lt^{10} + mt^{11} \\ \text{en } y &= a' + b't + c't^2 + d't^3 + e't^4 + f't^5 + g't^6 + h't^7 + i't^8 + k't^9 + l't^{10} + m't^{11}, \end{aligned} \right\} \text{ (I)}$$

van welke de onbekende coëfficiënten  $a, b, c, \dots, m$  en  $a', b', c', \dots, m'$  te bepalen zijn.

Wilden wij de algemeene vergelijking vinden onmiddellijk in  $x$  en  $y$  uitgedrukt, dan zouden wij, wanneer  $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n$  de coördinaten voorstellen der  $(n+1)$  gegeven punten, voor de algemeene vergelijking der parabolische kromme stellen kunnen

$$y = \beta X + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n, \dots\dots\dots \text{ (II)}$$

waarin  $X, X_1, \dots, X_n$  de volgende waarden hebben.

$$\begin{aligned}
X &= \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\dots(x-\alpha_n)}{(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha-\alpha_3)(\alpha-\alpha_4)\dots(\alpha-\alpha_n)}, \\
X_1 &= \frac{(x-\alpha)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\dots(x-\alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\dots(\alpha_1-\alpha_n)}, \\
X_2 &= \frac{(x-\alpha)(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\dots(x-\alpha_n)}{(\alpha_2-\alpha)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\dots(\alpha_2-\alpha_n)}, \\
&\dots\dots\dots \\
X_n &= \frac{(x-\alpha)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_{n-1})}{(\alpha_n-\alpha)(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)\dots(\alpha_n-\alpha_{n-1})},
\end{aligned}$$

alsdan zal de vergelijking (II) de vergelijking der parabolische kromme uitdrukken, die door  $(n+1)$  punten gaat, want voor

$$\begin{aligned}
x = \alpha \text{ is } X &= 1, X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_n = 0, \text{ dus } y = \beta; \\
x = \alpha_1 \text{ is } X &= 0, X_1 = 1, X_2 = 0, \dots, X_n = 0, \text{ dus } y = \beta_1; \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

en voor  $x = \alpha_n$  is  $X = 0, X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_n = 1$ , dus  $y = \beta_n$ .

Gemakkelijker zal het evenwel zijn de coëfficiënten der formules (I) te berekenen.

Daartoe stelle men in die formules achtereenvolgens  $t=0, t=1, t=2, t=3 \dots t=11$ , en wij verkrijgen dan van elk der onbekenden,  $x$  en  $y$ , twaalf vergelijkingen, waaruit de twaalf coëfficiënten  $a, b, c, \dots, m$ , en ook  $a', b', c', \dots, m'$  moeten afgeleid worden.

Ziehier de twaalf waarden voor de vermenigvuldigers der coëfficiënten van  $x$  en ook van  $y$ .

$z$	$x$ of $y$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$	$k$	$l$	$m$
0	$x_0$	1				1	1	1	1	1			1
1	$x_1$	1	1	1	1	16	32	64	128	256	512	1024	2048
2	$x_2$	1	2	4	8	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147
3	$x_3$	1	3	9	27	256	1024	4096	16384	65536	262144	1 048 576	4 194 304
4	$x_4$	1	4	16	64	625	3125	15625	78125	390625	1 953 125	9 765 625	48 828 125
5	$x_5$	1	5	25	125	1296	7776	46656	279936	1 679 616	10 077 888	60 461 176	362 787 056
6	$x_6$	1	6	36	216	2401	16807	117849	823543	5 764 801	40 353 607	282 475 249	1977 326 743
7	$x_7$	1	7	49	343	4096	32768	262144	2 097 152	16 777 216	134 217 728	1 073 741 824	8589 934 592
8	$x_8$	1	8	64	512	6561	59049	531441	4 782 969	43 046 721	387 420 439	3 486 784 401	31 381 059 609
9	$x_9$	1	9	81	729	10000	100000	1 000 000	10 000 000	100 000 000	1000 000 000	10000 000 000	100 000 000 000
10	$x_{10}$	1	10	100	1000	14641	161051	1 771 561	19 487 171	214 358 881	2357 947 691	25937 424 601	285 311 670 611
11	$x_{11}$	1	11	121	1331								

De coëfficiënten  $a, b, \dots, m$  worden nu door achtereenvolgende afbrekkingen op de volgende wijze verkregen.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Kenmaal  $x_0$  van al de overige af, geeft

$x_1 - x_0$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$x_2 - x_0$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
$x_3 - x_0$	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147
$x_4 - x_0$	11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881	2357947691	25937424601	285311670611

$2(x_1 - x_0)$  van al de overige af

$x_2 - 2x_1 + x_0$	2	6	14	30	62	126	254	510	1022	2046
$x_3 - 3x_1 + 2x_0$	6	24	78	240	726	2184	6558	19680	59046	177144
$x_4 - 4x_1 + 3x_0$	12	60	252	1020	4092	16380	65532	262140	1048572	4194300
	110	1320	14630	161040	1771550	19487160	214358870	2357947680	25937424590	285311670600

$3 \times (x_2 - 2x_1 + x_0)$  van de overige af

$x_3 - 3x_2 + 3x_1 - x_0$	6	36	150	540	1806	5796	18150	55980	171006
	24	168	840	3720	15624	64008	259080	1042440	4182024
	60	480	2820	15000	76860	388080	1948020	9755400	48807660
	990	13860	1519390	1768140	19480230	214344900	2357919630	25937368380	285311558070

$4 \times (x_3 - 3x_2 + 3x_1 - x_0)$  van de overige af

$x_4 - 4x_3 + 6x_2 - 3x_1 + x_0$	24	240	1560	8400	40824	186480	818620	3498000
	120	1320	9600	58800	330120	1766520	9195600	47097600
	360	4320	34920	241920	1559880	9707040	59331240	359346240
	7920	134640	1679040	19182240	213388560	2354924880	25928131680	285233342080

$$5 \times (x_1 - 4x_2 + \dots + x_0) \text{ van de overige af}$$

$x_5 - 5x_4 + 10x_3 - 10x_2 + 5x_1 - x_0$	120	1800	126000	834120	5 103000	29 607600
	720	11520	947520	6 909840	47 063440	306 876240
	2520	42840	463620	33 180840	251 846280	1848 868560
	55440	1 164240	16 410240	2293 386480	25658 020080	284129 002080

$$6 \times (x_5 - 5x_4 + \dots - x_0) \text{ van de volgende af}$$

$x_6 - 6x_5 + 15x_4 - 20x_3 + 15x_2 - \dots + x_0$	720	15120	191520	1 905120	16 435440	129 230640
	5040	110880	1 481760	15 664320	144 683280	1227 108480
	20160	463680	6 631840	73 422720	727 513920	6677 415360
	332640	8 648640	141 704640	1908 023040	23300 434080	270450 290880

$$7 \times (x_6 - 6x_5 + \dots + x_0) \text{ van de volgende af}$$

$x_7 - 7x_6 + 21x_5 - 35x_4 + 35x_3 - \dots - x_0$	5040	141120	2 328480	29 635200	322 494480
	40320	1 269280	20 079360	267 321600	3058 957440
	181440	5 443200	97 251840	1355 356800	16339 942080
	1 663200	53 222400	1027 857600	1570 726080	21074 535200

$$8 \times (x_7 - 8x_6 + \dots - x_0) \text{ van de overblijvende af}$$

$x_8 - 8x_7 + 28x_6 - 56x_5 + 70x_4 - \dots + x_0$	40320	1 451520	30 240000	479 001600
	362880	13 426560	288 489600	4730 140860
	1 814400	68 947200	1527 724810	25945 920000
	6 652800	259 459200	5927 644800	104322 556800

$$9 \times (x_8 - 8x_7 + \dots + x_0) \text{ van de 8 overige af}$$

$x_9 - 9x_8 - 36x_7 - 84x_6 - \dots - x_0$	362880	16 329600	419 126400
	362800	166 924800	4390 845000
	19 958400	938 046800	25287 292800

$$10 \times (x_9 - 9x_8 + \dots - x_0) \text{ voor de beide laatste af}$$

$x_{10} - 10x_9 + 45x_8 - \dots + x_0$	3 628800	199 584000
	39 916800	2235 340800

$$11 \times (x_{10} - 10x_9 + \dots + x_0) \text{ van de laatste af}$$

$x_{11} - 11x_{10} + \dots - x_0$	39 916800	39 916800
-----------------------------------	-----------	-----------

Uit de uitkomsten dezer berekening verkrijgt men voor de vergelijkingen der coëfficiënten (de eerste waarden van ieder der afgetrokken vormen).

$$\begin{aligned}
&= a, \\
x_0 &= m + l + h + i + h + g + f + e + d + c + b, \\
x_1 - x_0 &= \Delta_1 = 2046m + 1022l + 510k + 254i + 128h + 62g + 30f + 14e + 6d + 2c, \\
x_2 - 2x_1 + x_0 &= \Delta_2 = 171008m + 56980l + 18150k + 5796i + 1806h + 540g + 180f + 38e + 6d, \\
x_3 - 3x_2 + \dots - x_0 &= \Delta_3 = 3498990m + 918529l + 186480k + 40824i + 8400h + 1560g + 240f + 24e, \\
x_4 - 4x_3 + \dots + x_0 &= \Delta_4 = 29807800m + 5103000l + 834120k + 126900i + 16800h + 1800g + 120f, \\
x_5 - 5x_4 + \dots - x_0 &= \Delta_5 = 129230640m + 16435440l + 1905120k + 191520i + 15120h + 720g, \\
x_6 - 6x_5 + \dots + x_0 &= \Delta_6 = 322494480m + 29635200l + 2328480k + 141120i + 5040h, \\
x_7 - 7x_6 + \dots - x_0 &= \Delta_7 = 479001808m + 30240000l + 1451520k + 40320i, \\
x_8 - 8x_7 + \dots + x_0 &= \Delta_8 = 419126400m + 16329600l + 362880h, \\
x_9 - 9x_8 + \dots - x_0 &= \Delta_9 = 199584000m + 3628800l, \\
x_{10} - 10x_9 + \dots + x_0 &= \Delta_{10} = 39916800m, \\
x_{11} - 11x_{10} + \dots - x_0 &= \Delta_{11} = \{a\},
\end{aligned}$$

of wel, met invoeging der vroeger gevonden waarden van  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{11}$  voor  $x$ : p. 15,

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= 11.74662 = \{a\}, \\
\Delta_1 &= -0.86611 = 1 \{m + l + k + i + h + g + f + e + d + c + b\}, \\
\Delta_2 &= -0.88371 = 1.2 \{1023m + 511l + 255k + 127i + 62h + 31g + 15f + 7e + 3d + c\}, \\
\Delta_3 &= -0.29039 = 1.2.3 \{28501m + 9330l + 3025k + 966i + 301h + 99g + 25f + 6e + d\}, \\
\Delta_4 &= +0.85022 = 1.2.3.4 \{198750m + 34105l + 7770k + 1701i + 350h + 65g + 10f + e\}, \\
\Delta_5 &= +0.17635 = 1.2.3.4.5 \{248730m + 42525l + 6951k + 1050i + 140h + 15g + f\}, \\
\Delta_6 &= -0.21343 = 1.2.3.4.5.6 \{179487m + 22827l + 2848k + 263i + 21h + g\}, \\
\Delta_7 &= -3.36646 = 1.2.3 \dots 6.7 \{63987m + 5880l + 482k + 28i + h\}, \\
\Delta_8 &= +10.02564 = 1.2.3 \dots 7.8 \{11880m + 750l + 36k + i\}, \\
\Delta_9 &= -16.27737 = 1.2.3 \dots 8.9 \{1155m + 45l + k\}, \\
\Delta_{10} &= +21.93711 = 1.2.3 \dots 9.10 \{55m + l\}, \\
\Delta_{11} &= -46.49721 = 1.2.3 \dots 10.11 \{m\},
\end{aligned}$$



$\Delta$ $\log \Delta$ $\log 1.2 \dots 8$	$z$	$y$	$\Delta$ $\log \Delta$ $\log 1.2 \dots 7$	$z$	$y$	$\Delta$ $\log \Delta$ $\log 1.2 \dots 6$	$z$	$y$
	+10.02584 1.0011121 4.6055205	-13.71040 1.1370503 1.6055205		-3.36846 0.5642469 3.7024305	+6.04889 0.7810541 3.7024306		-0.21843 9.3922555 2.8573325	-1.01668 0.0071343 2.8573325
	6.3955916 +0.000248652 +0.013338480 -0.025569000 +0.065308240 +0.026811372 8.4283193	6.5315298 -0.000340040 +0.002335077 -0.006690000 +0.006731280 +0.001936357 7.2869854		6.8618164 -0.000727472 +0.074535560 -0.412258600 0.838122 -0.750718900 +0.499671488 9.6986845	7.0792326 -0.001200117 +0.011501850 -0.052285000 +0.086384780 -0.084218 -0.009816487 7.9919560		6.4719230 -0.000996431 +0.209076600 -1.600463 +4.800155 -7.131828 -10.493100	7.1498018 -0.001411893 +0.032263320 -0.202297770 +0.494749300 -0.515071 +0.206146900
$\log i$	9.8754773 0.8539009 1.4495086 1.6584936 1.4133964 0.5321230	8.7341434 9.7118670 0.3081747 0.5171597 0.2719625 9.3907891	$\log h$ $\log 21 h$ $\log 140 h$ $\log 350 h$ $\log 801 h$ $\log 63 h$			$\log g$ $\log 15 g$ $\log 65 g$ $\log 90 g$ $\log 31 g$		+0.014378057 8.1677002 9.3387915 9.9706136 0.1119427 9.6490619
$i =$	+0.026311372	+0.001936357	$h =$	0.499671488	-0.009816487	$g$	-14.216455931	+0.014378057
$\Delta$ $\log \Delta$ $\log 1.2 \dots 5$	+0.17635 9.2463755 2.0791812 7.1671943 +0.001469583	-0.44661 9.6499284 9.0791812 7.5707472 -0.003721750	$\Delta$ $\log \Delta$ $\log 1.2 \dots 3.4$	+0.85028 9.9295313 1.3802112 8.5493201 +0.035425880	+0.09376 9.9720176 1.3802112 8.5918084 +0.039066670	$\Delta$ $\log \Delta$ $\log 1.2 \dots 3$	-0.29039 9.4629817 0.7781513 8.684304 -0.048398330	+0.36479 9.5690429 0.7781513 8.7838916 +0.060798330

-246730 <sup>m</sup>	+0.287404800	+0.04350440	-145750 <sup>m</sup>	+0.169777700	+1.026199000	-28501 <sup>m</sup>	+0.033199550	+0.006123138
-42951 <sup>k</sup>	-2.931514	-0.378132300	-34105 <sup>k</sup>	-2.931170	-0.303262	-23301 <sup>k</sup>	-0.654145	-0.089962340
-6951 <sup>k</sup>	+12.609931	+1.299700	-7770 <sup>k</sup>	+14.095690	+1.452835	-3025 <sup>k</sup>	+5.487707	+0.585614600
-1080 <sup>k</sup>	-28.151950	-2.033175	-1701 <sup>k</sup>	-45.550550	-3.289726	-966 <sup>k</sup>	-25.899800	-1.870525
-140 <sup>k</sup>	-69.954000	+1.374308	-350 <sup>k</sup>	-174.855000	+3.435770	-301 <sup>k</sup>	+150.401100	+2.854762
-15 <sup>g</sup>	+213.246810	-0.215671	-66 <sup>g</sup>	+924.070000	-0.234574	-90 <sup>g</sup>	+1279.480000	-1.294025
<i>f</i> =	+125.057141383	+0.087658350	-10 <sup>f</sup>	-1250.571413830	-0.876585500	-25 <sup>f</sup>	-3119.236000	-2.191458
<i>Log f</i> =	0.0961083	8.9427932	<i>e</i> =	-535.027240300	-0.450624830	-6 <sup>e</sup>	+3210.163441800	+2.703748980
<i>Log 10 f</i> =	3.0961083	9.9427932	6 <sup>e</sup> =	-3210.163441800	2.703748980	<i>d</i> =	+1198.824905020	+0.851076708
<i>Log 25 f</i> =	3.4940483	0.3407332	7 <sup>e</sup> =	-3745.190682100	3.154373810	3 <i>d</i> =	+3596.474715060	2.553230124
<i>Log 15 f</i> =	3.2721996	0.1188845	<i>e</i> =	-535.027240300	-0.450624830	<i>d</i> =	+1198.824905020	+0.851076708
<i>f</i>	+125.057141383	+0.87658350	<i>e</i> =	-535.027240300	-0.450624830	<i>d</i> =	+1198.824905020	+0.851076708

<i>A</i> =	-0.88371	-0.60746	<i>A</i> =	-0.88611	+0.119610	<i>a</i> =	+11.74632	+7.95598
: 2	-0.441850	-0.303730	- <sup>m</sup>	-0.866110	+0.119610			
-1023 <sup>m</sup>	+0.001191644	+0.000183872	- <sup>m</sup>	+0.000001166	+0.000000180			
-511 <sup>k</sup>	-0.035827240	-0.004543813	- <sup>k</sup>	-0.000070112	-0.000008892			
-255 <sup>k</sup>	+0.462600	+0.047679920	- <sup>k</sup>	+0.001814118	+0.000186980			
-127 <sup>k</sup>	-3.412047	-0.245917300	- <sup>k</sup>	-0.026811372	-0.001936357			
-63 <sup>k</sup>	-31.479230	+0.618438600	- <sup>k</sup>	-0.499671488	+0.009816487			
-31 <sup>g</sup>	-440.710000	-0.446720	- <sup>g</sup>	+14.216455931	-0.014378057			
-15 <sup>g</sup>	-1871.542000	-0.131487500	- <sup>g</sup>	-125.057141380	-0.087658350			
-7 <sup>e</sup>	-3745.190682100	+3.154373810	- <sup>e</sup>	+535.027240300	+0.450624830			
-3 <i>d</i>	-3596.474715060	-2.553230124	- <sup>d</sup>	-1198.824905020	-0.851076708			
<i>c</i> =	1317.021196556	+0.131047465	- <sup>c</sup>	-1317.021196556	-0.131047465			
			<i>b</i> =	+540.991998696	-0.505867352			



Volgens deze berekening verkrijgen wij alzoo voor de algemeene vergelijking der kromme lijn, die door twaalf gegeven punten gaat

$$x = +11.74622 + 540.991998696t - 1317.021196556t^2 + \\ -1198.8249050t^3 - 535.027246300t^4 + 125.057141383t^5 - \\ -14.216455931t^6 + 0.499671488t^7 + 0.026811372t^8 - \\ +0.001814118t^9 + 0.000070112t^{10} = 0.000001165t^{11}.$$

$$y = +7.95598 - 0.505867352t + 0.181047465t^2 + \\ +0.851076708t^3 - 0.450624830t^4 + 0.087658350t^5 + \\ +0.014378057t^6 - 0.009816487t^7 + 0.001986557t^8 - \\ -0.000186980t^9 + 0.000008892t^{10} = 0.000000180t^{11}.$$


---

# OVER DE FIGUUR, WELKE ONTSTAAT, WANNEER MEN OP DE ZIJDEN VAN EEN DRIEHOEK PARALLELO- GRAMMEN BESCHRIJFT,

DOOR

DR. M. C. PARAIRA.

1. In de Nieuwe Wis- en Natuurkundige Verhandelingen door het genootschap „Eene onvermoeide arbeid komt alles te boven”, uitgegeven in het jaar 1844, komt een opstel voor van wijlen J. R. SCHMIDT, getiteld, *Verhandeling over eenige eigenschappen van den regthoekigen driehoek*”. Het heeft tot onderwerp de figuur, welke ontstaat, wanneer men op de zijden eens driehoeks buitenwaarts vierkanten beschrijft, en aldus steeds voortgaat. Ook in een tijdschrift voor Wis- en Natuurkunde, in 1852 te Amsterdam bij LOMAN EN REUDLER verschenen, vindt men van onbekende hand een stukje, waarin voor een deel hetzelfde behandeld wordt.

Het kwam mij voor, dat veel van hetgeen daar omtrent die figuur gezegd wordt, vatbaar moest zijn voor ruimer opvatting, en dat tevens de wijze van afleiding aanmerkelijk kon bekort worden. Een nader onderzoek daarvan voerde mij inderdaad tot de uitkomsten, welke in het volgende vermeld zijn, en waarin meer algemeene formules voorkomen, welke als bijzonder geval al datgene omvatten, wat in het boven vermelde geschrift van SCHMIDT gevonden wordt.

2. Laat  $AA'A$  een willekeurige driehoek zijn, welks inhoud I zij. Op zijne zijden beschrijf men parallelogrammen  $A'A'B_1'B_1$ ,  $A'AC_1C_1$ ,  $AA'D_1'D_1$  met gelijke hoeken en zoo gelegen, dat aan elk hoekpunt des driehoeks een scherpe hoek van één en een stompe

hoek van een tweede parallellogram samenkomen. De verhoudingen van de ongelijke zijden der parallellogrammen noeme men respectie  $\lambda$ ,  $\lambda'$  en  $\lambda''$ .

Men trekke dan de verbindingslijnen  $C_1 D_1$ ,  $D_1' B_1'$ ,  $B_1'' C_1''$ , en construeere op deze drie parallellogrammen  $C_1 D_1 B_1'' B_1'$  enz., waarvan elk gelijkvormig is met dat, waartoe de aan zijne basis overstaande zijde van den zeshoek  $C_1 D_1 D_1' B_1' B_1'' C_1''$  behoort, doch zoo geplaatst, dat aan elk hoekpunt van den zeshoek een scherpe of een stompe hoek samenkomt met een stompen of scherpen hoek van een der drie vorige parallellogrammen.

Weder trekke men dan de verbindingslijnen  $C_2 D_2$ ,  $D_2' B_2'$ ,  $B_2'' C_2''$ , en construeere op deze een drietal parallellogrammen  $C_2 D_2 B_2'' B_2'$ , enz., onder geheel dezelfde voorwaarden als het vorige.

Door op deze wijze voort te gaan, verkrijgt men eene reeks zeshoeken  $C_k D_k D_k' B_k' B_k'' C_k''$ .

De ruimte, begrensd door de omtrekken van  $\Delta A A' A''$  en den eersten zeshoek, bevat, behalve de drie parallellogrammen, drie driehoeken  $A C_1 D_1$ ,  $A' D_1' B_1'$  en  $A'' B_1'' C_1''$ , die wij respectievelijk door  $I_1$ ,  $I_1'$  en  $I_1''$  aanduiden.

De ruimte, besloten tusschen de omtrekken van twee op elkander volgende zeshoeken  $C_{k-1} D_{k-1} \dots C_{k-1}' D_{k-1}''$  en  $C_k D_k \dots C_k' D_k''$ , bestaat uit de drie parallellogrammen, benevens drie vierhoeken  $B_{k-1}' C_k D_k B_{k-1}''$ ,  $C_{k-1}' D_k' B_k' C_{k-1}''$  en  $D_{k-1} B_k'' C_k'' D_{k-1}'$ , die wij respectievelijk door  $I_k$ ,  $I_k'$  en  $I_k''$  voorstellen.

Kortheidshalve moge nog  $A' A'' = a_0$ ,  $A' A = a_0'$ ,  $A A'' = a_0''$ ,  $C_k D_k = a_k$ ,  $D_k' B_k' = a_k'$  en  $B_k'' C_k'' = a_k''$  gesteld worden; daarnit volgt dan tevens  $B_k' B_k'' = a_{k-1}$ ,  $C_k'' C_k = a_{k-1}'$  en  $D_k D_k' = a_{k-1}''$ .

3. Men brenge nu door A de lijnen  $A l$  en  $A l_1$  respectievelijk evenwijdig met de opstaande zijden der parallellogrammen op  $a_1$  en  $a_0$ , alsmede op gelijke wijze door A' de lijnen  $A' l'$  en  $A' l_1'$ , en door A'' de lijnen  $A'' l''$  en  $A'' l_1''$ . Alsdan is

$$\angle l_1 A D_1 = \angle l_1 A A' - \angle D_1 A A' = \angle A A' B_1' - \angle A' A' B_1' = \angle A A' A'', \\ \text{en } \angle l_1 D_1 A = \angle B_1'' D_1 A - \angle B_1'' D_1 C_1 = \angle D_1 A l - \angle D_1 A A' = \angle l A A'.$$

Hieruit volgt dan, dat  $\Delta A D_1 l_1 \sim \Delta A' A' l_1'$ ; terwijl op volkomen gelijke wijze blijkt, dat ook  $\Delta A C_1 l_1 \sim \Delta A' A' l_1'$ ;  $\Delta A' B_1' l_1' \sim \Delta A' A' l_1'$ ,  $\Delta A' D_1' l_1' \sim \Delta A A'' l_1''$ ,  $\Delta A' C_1'' l_1'' \sim \Delta A A'' l_1''$ , en  $\Delta A' B_1'' l_1'' \sim \Delta A' A' l_1''$  is. Men heeft dus  $\frac{A' l_1}{l_1 A} = \frac{A A'}{D_1 A} = \frac{1}{\lambda'}$  en  $\frac{l A''}{l_1 A} = \frac{1}{\lambda''}$ ; derhalve

$\frac{A'l}{lA'} = \frac{\lambda'}{\lambda''}$ ; en evenzoo  $\frac{A''l'}{l'A} = \frac{\lambda''}{\lambda}$  en  $\frac{Al''}{l''A'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$ ; waaruit door vermenigvuldiging verkregen wordt  $\frac{A'l}{lA'} \cdot \frac{A''l'}{l'A} \cdot \frac{Al''}{l''A'} = 1$ . De lijnen  $Al$ ,  $A'l'$  en  $A''l''$  snijden elkander dus altijd in één punt, hetwelk wij  $O$  zullen noemen, terwijl  $AO = b_0$ ,  $A'O = b_0'$ ,  $A''O = b_0''$ ,  $\triangle OAA' = i_0$ ,  $\triangle OA'A = i_0'$  en  $\triangle OAA'' = i_0''$  moge zijn.

Trekt men nu nog  $lk$  evenwijdig met  $AA''$ , zoo vindt men

$$Ol:AO = lk:l'A = \frac{A'l}{A'A'} \cdot A'l':l'A = \frac{A'l}{A'A'} \cdot \frac{l'A}{A'l'} = \frac{\lambda'}{\lambda' + \lambda''} : \frac{\lambda}{\lambda''},$$

$$\text{dus} \quad Al:Ol = \lambda' \lambda'' + \lambda'' \lambda + \lambda \lambda' : \lambda' \lambda''.$$

Stelt men dan  $\lambda' \lambda'' + \lambda'' \lambda + \lambda \lambda' = L$ , zoo is  $\frac{Al}{Ol} = \frac{L}{\lambda' \lambda''}$ ; en

$$\text{evenzoo} \quad \frac{A'l'}{Ol'} = \frac{L}{\lambda'' \lambda}, \quad \frac{A''l''}{Ol''} = \frac{L}{\lambda \lambda'}, \quad \text{derhalve} \quad i_0 = \frac{\lambda' \lambda''}{L} I, \\ i_0' = \frac{\lambda'' \lambda}{L} I, \quad i_0'' = \frac{\lambda \lambda'}{L} I.$$

Klaarblijkelijk is ook  $I_1 = \lambda' \lambda'' I$ ,  $I_1' = \lambda'' \lambda I$ ,  $I_1'' = \lambda \lambda' I$ ;

$$\text{dus} \quad \frac{I_1}{i_0} = \frac{I_1'}{i_0'} = \frac{I_1''}{i_0''} = L \text{ en } I_1 + I_1' + I_1'' = LI \dots (1)$$

$$\text{Verder is } C_1 D_1 = C_1 l_1 + l_1 D_1 = (\lambda' + \lambda'') Al = \frac{L}{\lambda} AO,$$

$$\text{derhalve} \quad \frac{\lambda a_1}{b_0} = \frac{\lambda' a_1'}{b_0'} = \frac{\lambda'' a_1''}{b_0''} = L \dots (2)$$

Door toepassing van het theorema van STEWART vindt men nog

$$Al^2 = \frac{\lambda''}{\lambda' + \lambda''} a_0''^2 + \frac{\lambda'}{\lambda' + \lambda''} a_0'^2 - \frac{\lambda' \lambda''}{(\lambda' + \lambda'')^2} a_0^2,$$

en hieruit  $a_1^2 = \lambda''(\lambda' + \lambda'') a_0''^2 + \lambda'(\lambda' + \lambda'') a_0'^2 - \lambda' \lambda'' a_0^2$ ; terwijl de optelling van deze waarde bij de gelijke van  $a_1'^2$  en  $a_1''^2$  geeft

$$a_1^2 + a_1'^2 + a_1''^2 = L(a_0^2 + a_0'^2 + a_0''^2) + 2(\lambda^2 - \lambda' \lambda'') a_0^2 + \\ + 2(\lambda'^2 - \lambda'' \lambda) a_0'^2 + 2(\lambda''^2 - \lambda \lambda') a_0''^2 \dots (3)$$

4. Verlengt men  $C_2 B_1'$  en  $D_2 B_1''$  tot zij elkander in  $O_1$ , —  $D_2' C_1''$  en  $B_2' C_1'$  tot zij elkander in  $O_1'$ , —  $B_2'' D_1$  en  $C_2'' D_1'$  tot zij elkander in  $O_1''$  snijden; zoo is  $\triangle B_1' B_1'' O_1 \cong i_0$ ,  $\triangle C_1'' C_1 O_1' \cong i_0'$ ,  $\triangle D_1 D_1' O_1'' \cong i_0''$ .

Dit geeft met het oog op (2)

$$\frac{B_2' C_1}{C_1 O_1} = \frac{B_2' D_1}{D_1 O_1} = \frac{\lambda a_1}{b_0} = L; \quad \frac{C_2' D_1'}{D_1' O_1'} = \frac{C_2 B_1'}{B_1' O_1'} = \frac{\lambda' a_1'}{b_0'} = L;$$

$$\frac{D_2 B_1''}{B_1'' O_1} = \frac{D_2' C_1''}{C_1'' O_1'} = \frac{\lambda'' a_1''}{b_0''} = L;$$

waaruit men mag besluiten, dat  $I_2$ ,  $I_2'$  en  $I_2''$  trapezia zijn; terwijl

$$\frac{I_2}{i_0} = \frac{I_2'}{i_0'} = \frac{I_2''}{i_0''} = \frac{O_1 C_2'^2 - O_1 B_1'^2}{O_1 B_1'^2} = \left(2 + \frac{C_2 B_1'}{B_1' O_1}\right) \frac{C_2 B_1'}{B_1' O_1} = (L+2)L,$$

$$\frac{I_2}{\lambda' \lambda''} = \frac{I_2'}{\lambda'' \lambda} = \frac{I_2''}{\lambda \lambda'} = (L+2)I \text{ en } \frac{a_2}{a_0} = \frac{a_2'}{a_0'} = \frac{a_2''}{a_0''} = L+1 \text{ is.}$$

Verlengt men evenzoo  $C_2 B_1'$  en  $D_2 B_1''$  tot zij elkander in  $O_2$ , —  $D_2' C_1''$  en  $B_2' C_2$  tot zij elkander in  $O_2'$ , —  $B_2' D_2$  en  $C_2' D_2'$  tot zij elkander in  $O_2''$  snijden, zoo is

$$\Delta B_2' B_2' O_2 \cong I_1, \quad \Delta C_2' C_2 O_2' \cong I_1', \quad \Delta D_2 D_2' O_2'' \cong I_1'';$$

waaruit volgt

$$\frac{B_2' C_2}{C_2 O_2} = \frac{B_2' D_2}{D_2 O_2} = \frac{\lambda a_2}{\lambda a_0} = L+1; \quad \frac{C_2' D_2'}{D_2' O_2'} = \frac{C_2 B_2'}{B_2' O_2'} = \frac{\lambda' a_2'}{\lambda' a_0'} = L+1;$$

$$\frac{D_2 B_2''}{B_2'' O_2} = \frac{D_2' C_2''}{C_2'' O_2'} = \frac{\lambda'' a_2''}{\lambda'' a_0''} = L+1,$$

zoodat ook  $I_3$ ,  $I_3'$  en  $I_3''$  trapezia zijn; terwijl

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{I_3'}{I_1'} = \frac{I_3''}{I_1''} = \frac{O_2 C_2'^2 - O_2 B_2'^2}{O_2 B_2'^2} = \left(2 + \frac{C_2 B_2'}{B_2' O_2}\right) \frac{C_2 B_2'}{B_2' O_2} = (L+2)(L+1),$$

$$\frac{I_3}{\lambda' \lambda''} = \frac{I_3'}{\lambda'' \lambda} = \frac{I_3''}{\lambda \lambda'} = (L+2)(L+1)I \text{ en } \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_3'}{a_1'} = \frac{a_3''}{a_1''} = L+2 \text{ is.}$$

Even gemakkelijk betoogt men, dat  $I_4$ ,  $I_4'$ ,  $I_4''$  trapezia zijn, en dat

$$\frac{I_4}{i_0} = \frac{I_4'}{i_0'} = \frac{I_4''}{i_0''} = (L^2 + 4L + 2)(L+2)L,$$

$$\frac{I_4}{\lambda' \lambda''} = \frac{I_4'}{\lambda'' \lambda} = \frac{I_4''}{\lambda \lambda'} = (L^2 + 4L + 2)(L+2)I,$$

$$\frac{a_4}{a_0} = \frac{a_4'}{a_0'} = \frac{a_4''}{a_0''} = L^2 + 3L + 1 \text{ is.}$$

Men stelle nu nog  $\Delta C_2 D_2 O_1 = i_2$ ,  $\Delta D_2' B_2' O_1' = i_2'$ ,  $\Delta B_2' C_2' O_1'' = i_2''$ , en algemeen, de door verlenging van  $C_i B_{i-1}'$

en  $D_k B'_{k-1}$  tot haar snijpunt  $O_{k-1}$ , — van  $D'_k C'_{k-1}$  en  $B'_k C_{k-1}$  tot haar snijpunt  $O'_{k-1}$ , — van  $B'_k D_{k-1}$  en  $C'_k D'_{k-1}$  tot haar snijpunt  $O''_{k-1}$  ontstaande driehoeken

$\triangle C_k D_k O_{k-1} = i_k$ ,  $\triangle D'_k B'_k O'_{k-1} = i'_k$ ,  $\triangle B'_k C'_k O''_{k-1} = i''_k$ , terwijl  $i_k$ ,  $i'_k$  en  $i''_k$  met  $I_k$ ,  $I'_k$  en  $I''_k$  identisch zijn.

Neemt men dan aan, dat alle vierhoeken van  $I_2$ ,  $I'_2$  en  $I''_2$  af tot  $I_{k-1}$ ,  $I'_{k-1}$  en  $I''_{k-1}$  trapezia zijn, wier inhouden zich verhouden als  $\lambda' \lambda'' : \lambda' \lambda : \lambda \lambda'$ ; zoo volgt uit die onderstelling

$$1^{\circ} \text{ dat } \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} = \frac{a'_{k-1}}{a'_{k-2}} = \frac{a''_{k-1}}{a''_{k-2}} \quad \text{is;}$$

$$2^{\circ} \text{ dat } \frac{C_{k-2} B'_{k-2}}{B'_{k-2} O'_{k-2}} = \frac{D_{k-2} B'_{k-2}}{B'_{k-2} O'_{k-2}} = \frac{D'_{k-2} C'_{k-2}}{C'_{k-2} O'_{k-2}} = \frac{B'_{k-2} C_{k-2}}{C_{k-2} O_{k-2}} = \frac{B'_{k-2} D_{k-2}}{D_{k-2} O_{k-2}} = \frac{C'_{k-2} D'_{k-2}}{D'_{k-2} O'_{k-2}} \quad \text{is,}$$

of volgens de constructie der parallelogrammen, en omdat steeds

$$\triangle B'_{k-1} B'_{k-1} O_{k-1} \simeq i_{k-1}, \quad \triangle C'_{k-1} C_{k-1} O'_{k-1} \simeq i'_{k-2}$$

$$\text{en} \quad \triangle D_{k-1} D'_{k-1} O'_{k-1} \simeq i''_{k-2} \quad \text{is,}$$

$$\frac{\lambda a_{k-2}}{O'_{k-1} C_{k-1}} = \frac{\lambda a_{k-2}}{O'_{k-1} D_{k-1}} = \frac{\lambda' a'_{k-2}}{O'_{k-1} D'_{k-1}} = \frac{\lambda' a'_{k-2}}{O_{k-1} B'_{k-1}} = \frac{\lambda' a'_{k-2}}{O_{k-1} B'_{k-1}} = \frac{\lambda' a'_{k-2}}{O'_{k-1} C'_{k-1}}.$$

$$\text{Nu is echter } C_{k-1} B'_k = D_{k-1} B'_k = \lambda a_{k-1},$$

$$D'_{k-1} C'_k = B'_{k-1} C'_k = \lambda' a'_{k-1}, \quad B'_{k-1} D'_k = C'_{k-1} D'_k = \lambda' a'_{k-1};$$

derhalve

$$\begin{aligned} \frac{B'_{k-1} C_k}{B'_{k-1} D_k} &= \frac{\lambda' a'_{k-1}}{\lambda' a'_{k-1}} = \frac{\lambda' a'_{k-1}}{\lambda' a'_{k-1}} = \frac{O_{k-1} B'_{k-1}}{O_{k-1} B'_{k-1}}; \\ \frac{C'_{k-1} D'_k}{C_{k-1} B'_k} &= \frac{\lambda' a'_{k-1}}{\lambda a_{k-1}} = \frac{\lambda' a'_{k-1}}{\lambda a_{k-1}} = \frac{O'_{k-1} C'_{k-1}}{O'_{k-1} C_{k-1}}; \\ \frac{D_{k-1} B'_k}{D'_{k-1} C'_k} &= \frac{\lambda a_{k-1}}{\lambda' a'_{k-1}} = \frac{\lambda a_{k-1}}{\lambda' a'_{k-1}} = \frac{O'_{k-1} D_{k-1}}{O'_{k-1} D'_{k-1}}; \end{aligned}$$

welke vergelijkingen het bewijs bevatten, dat dan ook  $I_k$ ,  $I'_k$  en  $I''_k$  trapezia zijn, wier inhouden zich verhouden als  $i_{k-2} : i'_{k-2} : i''_{k-2} = \lambda' \lambda'' : \lambda' \lambda : \lambda \lambda'$ .

Daar nu in het voorgaande bewezen is, dat het onderstelde waar is van  $I_2$ ,  $I'_2$  en  $I''_2$  tot  $I_k$ ,  $I'_k$  en  $I''_k$ , zoo is hiermede algemeen betoogd, dat al de vierhoeken  $I$  trapezia zijn, en dat men steeds heeft

$$\frac{I_k}{\lambda' \lambda''} = \frac{I_k'}{\lambda'' \lambda} = \frac{I_k''}{\lambda \lambda'} = \frac{I_k + I_k' + I_k''}{L} \dots \dots \dots (4)$$

Ook vormen de parallelogrammen zes reeksen, wier zijden respectieve evenwijdig zijn met die der op  $a_0, a_0', a_0'', a_1, a_1'$  en  $a_1''$  beschrevene parallelogrammen.

5. Houdt men dit in het oog, zoo toont de figuur onmiddellijk, dat steeds  $i_k, i_k'$  en  $i_k''$  kunnen worden samengevoegd tot één driehoek, welke bij even waarde van  $k$  met  $AA'A''$ , bij onevene waarde van  $k$  met  $O_1 O_1' O_1''$  gelijkvormig is; terwijl verder steeds

$$I_k + I_k' + I_k'' = (i_k + i_k' + i_k'') - (i_{k-2} + i_{k-2}' + i_{k-2}'')$$

is. Men heeft dus, omdat  $O_1 O_1' O_1'' = I_1 + I_1' + I_1''$  is,

$$\frac{I_{2p} + I_{2p}' + I_{2p}''}{I} = \frac{i_{2p} + i_{2p}' + i_{2p}''}{I} - \frac{i_{2p-2} + i_{2p-2}' + i_{2p-2}''}{I} = \frac{a_{2p}^2 - a_{2p-2}^2}{a_0^2},$$

$$\frac{I_{2p-1} + I_{2p-1}' + I_{2p-1}''}{I_1 + I_1' + I_1''} = \frac{i_{2p-1} + i_{2p-1}' + i_{2p-1}''}{O_1 O_1' O_1''} - \frac{i_{2p-3} + i_{2p-3}' + i_{2p-3}''}{O_1 O_1' O_1''} = \frac{a_{2p-1}^2 - a_{2p-3}^2}{a_1^2};$$

derhalve volgens (4) en (1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_{2p}}{\lambda' \lambda''} &= \frac{I_{2p}'}{\lambda'' \lambda} = \frac{I_{2p}''}{\lambda \lambda'} = \frac{a_{2p}^2 - a_{2p-2}^2}{a_0^2} \cdot \frac{I}{L} \\ \text{en } \frac{I_{2p-1}}{\lambda' \lambda''} &= \frac{I_{2p-1}'}{\lambda'' \lambda} = \frac{I_{2p-1}''}{\lambda \lambda'} = \frac{a_{2p-1}^2 - a_{2p-3}^2}{a_1^2} I, \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

Stelt men eindelijk nog  $A'B'_1 = A''B''_1 = b_1$ ,  $A''C''_1 = AC_1 = b_1'$ ,  $O'_{k-1}B'_k = O''_{k-1}B''_k = b_k$ ,  $O'_{k-1}C''_k = O_{k-1}C_k = b'_k$ , zoo is uit de figuur zichtbaar, dat steeds

$$\frac{b_n}{b_n'} = \frac{b_n}{b_n'}, \quad \frac{a_{2p-1}}{a_1} = \frac{b'_{2p-1}}{b_1'}, \quad \frac{a_{2p}}{a_0} = \frac{b'_{2p}}{b_0'};$$

dus ook volgens (2)

$$b_{2p} = \frac{b_0}{a_0} a_{2p} = \frac{\lambda a_1}{L a_0} a_{2p} \quad \text{en} \quad b_{2p-1} = \frac{b_1}{a_1} a_{2p-1} = \frac{\lambda a_0}{a_1} a_{2p-1} \quad \text{is.}$$

Algemeen is bovendien blijktens de figuur

$$b_k = b_{k-2} + \lambda a_{k-1} \quad \text{of} \quad b_k - \lambda a_{k-1} - b_{k-2} = 0;$$

derhalve

$$\frac{a_{2p}}{a_0} - L \frac{a_{2p-1}}{a_1} - \frac{a_{2p-2}}{a_0} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{a_{2p-1}}{a_1} - \frac{a_{2p-2}}{a_0} - \frac{a_{2p-3}}{a_1} = 0,$$

en evenzoo

$$\frac{a_{2p-2}}{a_0} - L \frac{a_{2p-3}}{a_1} - \frac{a_{2p-4}}{a_0} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{a_{2p-3}}{a_1} - \frac{a_{2p-4}}{a_0} - \frac{a_{2p-5}}{a_1} = 0^1).$$

Met behulp dezer vergelijkingen vindt men dan uit (5)

$$\begin{aligned} \frac{I_{2p} + I_{2p-2}}{\lambda' \lambda''} &= \left\{ \left( \frac{a_{2p}}{a_0} \right)^2 - \left( \frac{a_{2p-1}}{a_0} \right)^2 \right\} \frac{I}{L} = \\ &= \left\{ \frac{2La_{2p-2}}{a_0 a_1} (a_{2p-1} + a_{2p-3}) + \frac{L^2}{a_1^2} (a_{2p-1}^2 - a_{2p-3}^2) \right\} \frac{I}{L} = \\ &= (L+2) \frac{a_{2p-1}^2 - a_{2p-3}^2}{a_1^2} I = (L+2) \frac{I_{2p-2}}{\lambda' \lambda''}, \end{aligned}$$

of 
$$I_{2p} - (L+2)I_{2p-1} + I_{2p-2} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{I_{2p-1} + I_{2p-3}}{\lambda' \lambda''} &= \left\{ \left( \frac{a_{2p-1}}{a_1} \right)^2 - \left( \frac{a_{2p-3}}{a_1} \right)^2 \right\} I = \\ &= \left\{ \frac{2a_{2p-3}}{a_0 a_1} (a_{2p-2} + a_{2p-4}) + \frac{a_{2p-2}^2 - a_{2p-4}^2}{a_0^2} \right\} I = \\ &= \frac{L+2}{L} \cdot \frac{a_{2p-2}^2 - a_{2p-4}^2}{a_0^2} I = (L+2) \frac{I_{2p-2}}{\lambda' \lambda''}, \end{aligned}$$

of 
$$I_{2p-1} - (L+2)I_{2p-2} + I_{2p-3} = 0;$$

dus voor alle waarden van  $k$  en  $L+2 = M$  stellende,

$$I_k - M I_{k-1} + I_{k-2} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

De inhouden  $I$  blijken dus de coëfficiënten te zijn van de termen eener wederkeerige reeks, voor wier voortbrengende breuk men met het oog op de waarden van  $I_1$  en  $I_2$  uit (4), verkrijgt

$$\frac{\lambda' \lambda'' I}{1 - Mx + x^2}.$$

De algemeene term der reeks is dus  $I_k x^{k-1}$ . Nu is identisch

$$\frac{\lambda' \lambda'' I}{1 - Mx + x^2} = \frac{\lambda' \lambda'' I}{V(M^2 - 4)} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2}M - \frac{1}{2}V(M^2 - 4) - x} - \frac{1}{\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}V(M^2 - 4) - x} \right\},$$

waaruit volgt dat de algemeene term tot coëfficiënt heeft

<sup>1)</sup> Hieruit volgt gemakkelijk, dat algemeen  $a_k - (L+2)a_{k-2} + a_{k-4} = 0$  is.



$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{\lambda' \lambda'' I}{\sqrt{(M^2-4)}} \left\{ \frac{1}{\left\{ \frac{1}{2} M - \frac{1}{2} \sqrt{(M^2-4)} \right\}^k} - \frac{1}{\left\{ \frac{1}{2} M + \frac{1}{2} \sqrt{(M^2-4)} \right\}^k} \right\} = \\
&= \frac{\lambda' \lambda'' I}{2^k \sqrt{(M^2-4)}} \left\{ (M + \sqrt{M^2-4})^k - (M - \sqrt{M^2-4})^k \right\} = \\
&= \frac{\lambda' \lambda'' I}{2^{k-1}} \left\{ \frac{k}{1} M^{k-1} + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} M^{k-3} (M^2-4) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{k(k-1) \dots (k-4)}{1 \cdot 2 \dots 5} M^{k-5} (M^2-4)^2 + \dots \right\},
\end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned}
\frac{I_k}{\lambda' \lambda''} = \frac{I'_k}{\lambda'' \lambda} = \frac{I_k''}{\lambda \lambda'} = \frac{I}{2^{k-1}} \left\{ \binom{k}{1} M^{k-1} + \binom{k}{3} M^{k-3} (M^2-4) + \right. \\
\left. + \binom{k}{5} M^{k-5} (M^2-4)^2 + \dots \right\}; \quad (7)
\end{aligned}$$

waardoor nu geheel algemeen de waarden van  $I_k$ ,  $I'_k$  en  $I''_k$  worden gegeven.

Neemt men in (7)  $k = 2p$ , zoo bevat de vorm enkel onevene machten van  $M$ . Bij de ontwikkeling vindt men dan voor de coëfficiënt van  $M^{2p-2n-1}$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \binom{2p}{2p-2n-1} \binom{n}{0} + \binom{2p}{2p-2n-3} \binom{n+1}{1} + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \binom{2p}{3} \binom{p-2}{p-n-2} + \binom{2p}{1} \binom{p-1}{p-n-1} \right\} (-4)^n \cdot \frac{I}{2^{2p-1}} = 1) \\
&= \frac{2p(4p^2-2^2)(4p^2-4^2) \dots \{4p^2-(2p-2n-2)^2\}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p-2n-1)} (-1)^n \frac{I}{2^{2p-2n-1}} = \\
&= (-1)^n \cdot \frac{2^{2p-2n-1} (2p-n-1)(2p-n-2) \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p-2n-1)} \frac{I}{2^{2p-2n-1}} = \\
&= (-1)^n \binom{2p-n-1}{n} I;
\end{aligned}$$

zoodat voor evene waarde van  $k$ , de gedaante der ontwikkelde vorm is

$$\frac{I_{2p}}{\lambda' \lambda''} = \frac{I'_{2p}}{\lambda'' \lambda} = \frac{I''_{2p}}{\lambda \lambda'} = I \sum_{n=0}^{p-1} (-1)^n \binom{2p-n-1}{n} M^{2p-2n-1} \quad (8)$$

Voor  $k = 2p+1$ , komen alleen evene machten van  $M$  voor. De coëfficiënt van  $M^{2p-2n}$  is dan

1) Zie SCHLÖMCH, *Algebr. Analysis*, 3e Auflage, § 26.

$$\begin{aligned}
& \left\{ \binom{2p+1}{2p-2n} \binom{n}{0} + \binom{2p+1}{2p-2n-2} \binom{n+1}{1} + \dots + \right. \\
& \quad \left. + \binom{2p+1}{2} \binom{p-1}{p-n-1} + \binom{2p+1}{0} \binom{p}{p-n} \right\} (-4)^n \cdot \frac{I}{2^{2p}} = 1 \\
& = \frac{\{(2p+1)^2 - 1^2\} \{(2p+1)^2 - 3^2\} \dots \{(2p+1)^2 - (2p-2n-1)^2\}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p-2n)} (-1)^n \frac{I}{2^{2p-2n}} = \\
& = \frac{2^{2p-2n} (2p-n)(2p-n-1) \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p-2n)} (-1)^n \cdot \frac{I}{2^{2p-2n}} = (-1)^n \binom{2p-n}{n} I;
\end{aligned}$$

waaruit dus voor oneven waarden van  $k$  volgt

$$\frac{I_{2p+1}}{\lambda' \lambda''} = \frac{I_{2p+1}}{\lambda' \lambda} = \frac{I_{2p+1}}{\lambda \lambda''} = I \sum_{n=p}^{n=0} (-1)^n \binom{2p-n}{n} M^{2p-2n} \dots (9)$$

De verkregen uitkomsten leeren dus

1°. dat de waarden van  $I_k$ ,  $I'_k$  en  $I''_k$  geene andere standvastigen bevatten dan de inhoud  $I$  van den oorspronkelijken driehoek en de groottheden  $\lambda$ ,  $\lambda'$  en  $\lambda''$ ; en derhalve onafhankelijk zijn van de gedaante van den driehoek en van de hoeken der parallelogrammen;

2°. dat, zoodra  $\lambda' \lambda''$  en  $M$  geheele getallen zijn, alle  $I_k$  geheele veelvouden van  $I$  worden. Dit blijkt behalve uit de vormen (3) en (9) reeds uit vergelijking (6). Immers  $I_1 = \lambda' \lambda'' I$ ,  $I_2 = M \lambda' \lambda'' I$  en verder  $I_k = M I_{k-1} - I_{k-2}$ . Zullen ook  $I'_k$  en  $I''_k$  geheele veelvouden van  $I$  zijn, zoo vordert dit bovendien, dat  $\lambda' \lambda$  en  $\lambda \lambda''$  geheele waarden hebben.

7. Verlangt men dat  $I_k = I'_k = I''_k$  zal zijn, zoo moet daartoe  $\lambda' \lambda'' = \lambda' \lambda = \lambda \lambda''$  of  $\lambda = \lambda' = \lambda''$  zijn. In dat geval worden al de parallelogrammen gelijkvormig. De punten  $l$ ,  $l'$  en  $l''$  zijn dan de middens der zijden, en  $O$  is dus het zwaartepunt van den driehoek  $AA'A''$ . Ook  $l_1$ ,  $l'_1$  en  $l''_1$  zijn in dit geval de middens van  $a_1$ ,  $a'_1$  en  $a''_1$ .

De vergelijking (3) verkrijgt de vorm

$$a_1^2 + a'_1{}^2 + a''_1{}^2 = 3\lambda^2(a_0^2 + a'_0{}^2 + a''_0{}^2).$$

Neemt men in het bijzonder  $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 1$ , zoo worden de parallelogrammen gelijkvormige uniten. Aldan is  $L = 3$ ,  $M = 5$ ,  $M^2 - 4 = 21$ .

Men verkrijgt dus voor dit geval

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{b_0} &= \frac{a'_1}{b'_0} = \frac{a''_1}{b''_0} = 3; \quad \frac{a_2}{a_0} = \frac{a'_2}{a'_0} = \frac{a''_2}{a''_0} = 4; \\
a_1^2 + a'_1{}^2 + a''_1{}^2 &= 3(a_0^2 + a'_0{}^2 + a''_0{}^2); \\
\frac{a_{2p}}{a_0} &= 3 \frac{a_{2p-1}}{a_1} + \frac{a_{2p-2}}{a_0}; \quad \frac{a_{2p-1}}{a_1} = \frac{a_{2p-2}}{a_0} + \frac{a_{2p-3}}{a_1};
\end{aligned}$$

$$a_k - 5a_{k-2} + a_{k-4} = 0;$$

$$I_k - 5I_{k-1} + I_{k-2} = 0;$$

$$I_k = I'_k = I''_k = \frac{I}{2^{k-1}} \left\{ \binom{k}{1} 5^{k-1} + \binom{k}{3} 5^{k-3} 2^1 + \binom{k}{5} 5^{k-5} 2^1 2^1 + \dots \right\};$$

$$\begin{aligned} I_{2p} = I'_{2p} = I''_{2p} = I \sum_{n=0}^{p-1} (-1)^n \binom{2p-n-1}{n} 5^{2p-2n-1} = \\ = \left\{ 5^{2p-1} - \frac{2p-2}{1} 5^{2p-3} + \frac{(2p-3)(2p-4)}{1 \cdot 2} 5^{2p-5} - \dots + \right. \\ \left. + (-1)^{p-2} \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 5^2 + (-1)^{p-1} \frac{p}{1} 5 \right\} I; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{2p+1} = I'_{2p+1} = I''_{2p+1} = I \sum_{n=0}^{p-1} (-1)^n \binom{2p-n}{n} 5^{2p-2n} = \\ = \left\{ 5^{2p} - \frac{2p-1}{1} 5^{2p-2} + \frac{(2p-2)(2p-3)}{1 \cdot 2} 5^{2p-4} - \dots + \right. \\ \left. + (-1)^{p-1} \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2} 5^2 + (-1)^p \right\} I; \end{aligned}$$

$$I_1 = I, I_2 = 5I, I_3 = 24I, I_4 = 115I, I_5 = 551I, I_6 = 2640I. \text{ enz.}$$

Blijkbaar blijft dit alles onveranderd, wanneer men de ruiten in vierkanten laat overgaan, waardoor men het bijzondere geval verkrijgt, dat tot dit onderzoek heeft aanleiding gegeven.

## EEN STEREOMETRISCH ANALOGON VAN HET THEOREMA VAN PAPPUS,

DOOR

**D<sup>n</sup>. M. C. PARAIRA.**

STELLING. Construeert men op al de zijvlakken eener piramide willekeurige prismata, doch wier bovenvlakken elkander bij uitbreiding in een punt snijden, zoo is de som hunner inhouden steeds gelijk

aan den inhoud van een prisma, dat met de piramide het grondvlak gemeen heeft, en welks ribben gelijk en evenwijdig zijn met den afstand van den top der piramide tot het gemeenschappelijk snijpunt van de bovenvlakken der prismata.

Bewijs. Zij  $TABCDE\dots$  een deel der piramide,  $TABFGH$ ,  $TBCIKL$ ,  $TCDMNO$ ,  $TDEPQS$  vier der prismata,  $T'$  het gemeenschappelijk snijpunt hunner bovenvlakken. De snijlijnen  $T'a$ ,  $T'b$ ,  $\dots$  der bovenvlakken onderling loopen dan evenwijdig met de ribben  $TA$ ,  $TB$ ,  $\dots$  der piramide, en die met het grondvlak sluiten een veelhoek  $abcde\dots$  in, gelijkvormig met  $ABCDE\dots$ , en zoo gelegen, dat  $aA$ ,  $bB$ ,  $cC$ ,  $\dots$  elkander allen snijden in het ontmoetingspunt van het grondvlak met het verlengde van  $T'T$ . Trekt men dus uit  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\dots$  lijnen evenwijdig met  $RT$ , welke  $T'a$ ,  $T'b$ ,  $T'c$ ,  $\dots$  in  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $\dots$  snijden, zoo is  $AA' = BB' = CC' = \dots = TT'$ , terwijl  $A'B'C'D'E'\dots$  evenwijdig en congruent met  $ABCDE\dots$  is; zoodat  $ABCDE\dots A'B'C'D'E'\dots$  een prisma is, dat het grondvlak gemeen heeft met de piramide en welks ribben gelijk en evenwijdig zijn met  $TT'$ . Is dan  $R'$  het snijpunt van zijn bovenvlak met  $TR$ , en trekt men nog  $R'A'$ ,  $R'B'$ ,  $R'C'$   $\dots$  zoo blijkt onmiddellijk, dat  $\text{Inhoud } TABFGH = \text{Inhoud } TABT'A'B' = \text{Inhoud } ABRA'B'R'$  is. Evenzoo heeft men  $\text{Inhoud } TBCIKL = \text{Inhoud } BCB'R'$  enz., waaruit dus de waarheid der stelling volgt.

Daar de bovenvlakken van geheel willekeurige prismata, op drie zijvlakken van een tetraeder geplaatst, elkander steeds in één punt snijden, heeft men voor dit geval de

**STELLING.** De som van drie prismata geplaatst op drie zijvlakken van een tetraeder is gelijk aan een vierde prisma, dat het vierde zijvlak tot grondvlak heeft en welks ribben gelijk en evenwijdig zijn met den afstand van het overstaande hoekpunt tot het snijpunt van de bovenvlakken der drie prismata.

# OVER EENIGE THEOREMA'S OMTRENT ONEINDIGE REEKSEN,

DOOR

T. J. STIELTJES Jr.

1. In het 89<sup>ste</sup> deel van het *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (S. 242—244), geeft de heer G. FROBENIUS in een kort opstel „Über die Leibnitzsche Reihe”, een theorema, dat aldaar ten slotte onder dezen vorm uitgesproken wordt.

„Ist  $s_n$  eine von  $n$  abhängige Grösse, und nähert sich  $\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n}$  bei wachsendem  $n$  einer bestimmten endlichen Grenze, so nähert sich

$$(1-x)(s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \dots)$$

falls  $x$  beständig zunehmend gegen 1 convergirt, derselben Grenze.”

Dit theorema vertoont eenige analogie met een ander, dat mij sedert lang bekend was en waarvan de waarheid, naar het mij toeschijnt, bij eenig nadenken van zelf duidelijk is; reden, waarom ik indertijd het volledig uitwerken van een streng bewijs naliet. Het stukje van den heer FROBENIUS geeft me nu echter aanleiding, het hierop betrekking hebbende eenigzins te ontwikkelen, en er eenige bemerkingen aan toe te voegen; waarbij het blijkt, dat men algemeener kan zeggen dat, wanneer  $u > 0$  is,

$$(1-x)^u \left[ s_0 + \frac{u}{1} s_1 x + \frac{u(u+1)}{1.2} s_2 x^2 + \frac{u(u+1)(u+2)}{1.2.3} s_3 x^3 + \dots \right],$$

en ook 
$$\frac{s_1 x + \frac{1}{2} s_2 x^2 + \frac{1}{3} s_3 x^3 + \frac{1}{4} s_4 x^4 + \dots}{\lg \left( \frac{1}{1-x} \right)},$$

wanneer  $x$  steeds toenemend tot de limiet 1 convergeert, tot dezelfde limiet convergeert als

$$\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n} \text{ voor } n = \infty.$$

De vorm van het bewijs van FROBENIUS schijnt mij toe niets te wenschen over te laten, en ik heb daarom niet gearzeld hem hierin geheel te volgen.

2. Het boven bedoelde theorema bestaat in het volgende. Zijn  $a_0, a_1, a_2, \dots$  allen positief, of ten minste niet negatief, en convergeert de reeks

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

voor alle waarden  $0 < x < 1$ , maar divergeert deze reeks voor  $x = 1$ ; dan volgt hieruit van zelf, dat  $\psi(x)$  boven alle grenzen toeneemt wanneer  $x$ , steeds toenemend, tot 1 convergeert. Vormen nu verder

$$s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$$

eene onbepaald voortlopende rij getallen, die tot een limiet  $M$  convergeeren <sup>1)</sup>, dan is het duidelijk, dat ook de reeks

$$f(x) = a_0 s_0 + a_1 s_1 x + a_2 s_2 x^2 + \dots$$

voor alle waarden van  $x$ ,  $0 < x < 1$ , convergeert.

In deze onderstellingen nu bestaat de te bewijzen eigenschap hierin, dat

$$\frac{f(x)}{\psi(x)}$$

tot de limiet  $M$  convergeert, terwijl  $x$  steeds toenemend tot de eenheid nadert.

De omtrent de rij getallen

$$s_0, s_1, s_2, \dots$$

gemaakte onderstelling heeft dezen zin, hoe klein een (positief) getal  $\varepsilon$  ook gegeven is, het is altijd mogelijk een (eindig) getal  $n$  zoo groot te kiezen, dat, wanneer men stelt

$$m_{n+k} = M + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

de volstreekte waarden van

<sup>1)</sup> Dat  $M$  eindig is, wordt hierbij als van zelf sprekend ondersteld. Het spraakgebruik, volgens hetwelk men somtijds van een reeks grootheden, die ten slotte boven alle grenzen toenemen, zegt, dat zij tot de limiet  $\infty$  convergeeren, schijnt me, in het algemeen, niet aanbevelingswaard.

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  alle kleiner dan  $\varepsilon$  zijn.

Zij nu

$$\left. \begin{aligned} P &= a_0 s_0 + a_1 s_1 x + a_2 s_2 x^2 + \dots + a_{n-1} s_{n-1} x^{n-1}, \\ Q &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}, \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

dan volgt, met behulp van (1),

$$f(x) = P + a_n x^n (M + \varepsilon_0) + a_{n+1} x^{n+1} (M + \varepsilon_1) + a_{n+2} x^{n+2} (M + \varepsilon_2) + \dots$$

zoodat  $f(x)$  een waarde heeft, gelegen tusschen

$$P + (M + \varepsilon)(\psi(x) - Q)$$

en

$$P + (M - \varepsilon)(\psi(x) - Q);$$

waaruit volgt dat  $f(x) : \psi(x)$  ligt tusschen

$$M + \varepsilon + \frac{P - Q(M + \varepsilon)}{\psi(x)}$$

en

$$M - \varepsilon + \frac{P - Q(M - \varepsilon)}{\psi(x)}.$$

Wanneer nu  $x$  tot 1 convergeert, convergeeren  $P$  en  $Q$  tot zekere eindige limieten, terwijl, volgens de onderstelling,  $\psi(x)$  boven alle grenzen toeneemt. Men zal dus  $x$  kleiner dan 1, maar zoo dicht bij 1 kunnen nemen, dat de volstreckte waarden van

$$\frac{P - Q(M + \varepsilon)}{\psi(x)} \quad \text{en} \quad \frac{P - Q(M - \varepsilon)}{\psi(x)}$$

kleiner zijn dan een geheel willekeurig gegeven positief getal  $\delta$ , en kleiner dan  $\delta$  blijven, wanneer  $x$  nog dichter bij 1 genomen wordt.

Wat bewezen moet worden is dit, hoe klein een (positief) getal  $\beta$  ook gegeven is, men zal altijd een (positief) getal  $\alpha$  zóó kunnen bepalen, dat voor alle waarden van  $x$ , die tusschen 1 en  $1 - \alpha$  liggen, (exclusive  $x = 1$ , inclusive  $x = 1 - \alpha$ ) de volstreckte waarde van het verschil  $\frac{f(x)}{\psi(x)} - M$  kleiner dan  $\beta$  is.

Inderdaad, men kan  $\alpha$  aldus bepalen. Men splitse  $\beta$  in de som van twee positieve getallen  $\beta = \delta + \varepsilon$ . Bij de waarde van  $\varepsilon$  bepale men  $n$  evenals boven; namelijk men neme  $n$  zoo groot, dat,  $m_{n+k} = M + \varepsilon_k$  gesteld zijnde,  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  allen kleiner dan  $\varepsilon$  zijn (volstrekt genomen). Nadat dus  $n$  en daarmee ook  $P$  en  $Q$  bekend zijn, bepale men nu  $\alpha$  door de voorwaarde, dat de volstreckte waarden van

$$\frac{P - Q(M + \varepsilon)}{\psi(x)} \quad \text{en} \quad \frac{P - Q(M - \varepsilon)}{\psi(x)}$$

voor alle waarden  $1 - \alpha \leq x < 1$ , kleiner dan  $\delta$  blijven.

Volgens het bovenstaande ligt dan, voor deze waarden van  $x$ ,

$$\frac{f(x)}{\psi(x)}$$

tusschen  $M + \epsilon + \delta$  en  $M - \epsilon - \delta$ , d. w. z. tusschen  $M + \beta$  en  $M - \beta$ .

Het is duidelijk, dat de onderstelling, dat  $\psi(x)$  en  $f(x)$  reeksen zijn, gerangschikt volgens de geheele opklimmende machten van  $x$ , bij de bovenstaande afleiding eigenlijk geene rol speelt; zoodat de uitkomst gemakkelijk in een algemeener vorm uitgesproken kan worden. Hierbij moet echter opgemerkt worden, dat een wezenlijk punt van de redeneering hierin bestaat, dat  $m_0, m, m_2, \dots$  niet van de veranderlijke  $x$  afhangen, zoodat de bepaling van  $n$  geheel onafhankelijk is van de bijzondere waarden, die men later goedvindt aan  $x$  toe te schrijven.

3. Als een voorbeeld van de bruikbaarheid van het bewezen theorema kan de hypergeometrische reeks dienen

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

Hierbij komen dus alleen die gevallen in aanmerking, dat de reeks voor  $x = 1$  divergeert.

De volgende aan GAUSS [*Disq. gen. circa etc. Werke* III, S. 125 en 207] ontleende eigenschappen mogen vooraf in herinnering gebracht worden.

1) Van zekeren term af veranderen de termen van de reeks  $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$  niet meer van teeken, en zij nemen òf voortdurend toe, òf voortdurend af.

2) De termen nemen boven alle grenzen toe, wanneer  $\alpha + \beta - \gamma - 1$  positief is.

3) De termen convergeeren tot een eindige, van 0 verschillende limiet, wanneer  $\alpha + \beta - \gamma - 1 = 0$ .

4) De termen convergeeren tot nul, wanneer  $\alpha + \beta - \gamma - 1$  negatief is.

5) De reeks convergeert voor  $x = 1$ , wanneer  $\alpha + \beta - \gamma < 0$ , en divergeert, wanneer  $\alpha + \beta - \gamma \geq 0$ .

Volgens 3) convergeert de uitdrukking

$$\frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)},$$

waarin  $\alpha + \beta - \gamma - 1 = 0$ , voor  $n = \infty$ , tot een eindige limiet.

$$\text{Deze limiet is} \quad = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}.$$



Iets algemeener vindt men, dat

$$\lim \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{u(u+1)\dots(u+n-1)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} = \frac{\Pi(u-1)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}, \quad \left. \begin{array}{l} \text{voor } n = \infty, \text{ wanneer } \alpha + \beta - \gamma - u = 0; \end{array} \right\} (3)$$

en wel volgt dit onmiddellijk uit de definitie

$$\Pi(z) = \lim \frac{1.2.3\dots n}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)} n^z, \quad n = \infty.$$

Daar alleen de gevallen, dat de reeks voor  $x = 1$  divergeert, hier beschouwd worden, zoo ziet men uit (5), dat  $\alpha + \beta - \gamma \geq 0$  ondersteld moet worden. De gevallen  $\alpha + \beta - \gamma > 0$  en  $\alpha + \beta - \gamma = 0$  moeten afzonderlijk behandeld worden.

$$\text{I.} \quad \alpha + \beta - \gamma > 0.$$

Dan is dus  $u = \alpha + \beta - \gamma$  positief; neemt men nu, in het algemeene theorema

$$s_0 = 1, \quad s_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{u(u+1)\dots(u+n-1)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)},$$

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{u(u+1)\dots(u+n-1)}{1.2.3\dots n};$$

$$\begin{aligned} \text{dan is} \quad \psi(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = (1-x)^{-u}, \\ f(x) &= a_0 s_0 + a_1 s_1 x + a_2 s_2 x^2 + \dots = F(\alpha, \beta, \gamma, x), \end{aligned}$$

$$\text{en volgens (3)} \quad \lim s_n = M = \frac{\Pi(u-1)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)};$$

zoodat men onmiddellijk verkrijgt

$$\lim (1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}, \quad \left. \begin{array}{l} \alpha + \beta - \gamma > 0, \quad x < 1, \quad \lim x = 1, \end{array} \right\} \dots (4)$$

$$\text{II.} \quad \alpha + \beta - \gamma = 0.$$

Neemt men, om dit geval te behandelen

$$m_0 = \frac{1}{\alpha}, \quad m_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1.2.3\dots n.\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \times \frac{n+1}{\alpha+n},$$

$$a_0 = \alpha, \quad a_n = \frac{\alpha}{n+1};$$

$$\text{dan is} \quad \psi(x) = \alpha + \frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha}{3}x^2 + \dots = \frac{\alpha}{x} \operatorname{Lg} \left( \frac{1}{1-x} \right),$$

$$\lim m_n = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha)\Pi(\beta-1)} = \frac{\Pi(\alpha+\beta-1)}{\alpha\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)};$$

en na een kleine herleiding volgt

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(\alpha, \beta, \alpha + \beta, x)}{\lg \left( \frac{1}{1-x} \right)} &= \frac{\Pi(\alpha + \beta - 1)}{\Pi(\alpha - 1) \Pi(\beta - 1)}, \\ x < 1, \quad \lim x &= 1. \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Het behoeft nauwelijks gezegd te worden, dat de door (4) en (5) uitgedrukte eigenschappen ook onmiddellijk uit de theorie der herleiding der  $F$  functie volgen. De formule (4) is in overeenstemming met de formules [82] op blz. 209 en formule [48] op blz. 147 van GAUSS' *Werke*, Bd. III, terwijl de formule (5) onmiddellijk volgt uit formule [28] blz. 217.

Geheel dezelfde methode kan toegepast worden bij die reeksen, welke op dezelfde wijze als de hypergeometrische samengesteld zijn, maar bij welke de coëfficiënt van  $x^n$  in teller en noemer meer elementen bevat. Noemt men  $F(x)$  de oneindige reeks, waarvan de eerste term  $= 1$  is, en waarvan de  $n + 1^{\text{ste}}$  term ontstaat door den  $n^{\text{den}}$  te vermenigvuldigen met

$$\frac{(\alpha + n - 1)(\alpha_1 + n - 1) \dots (\alpha_k + n - 1)}{n(\beta_1 + n - 1) \dots (\beta_k + n - 1)} x;$$

dan vindt men voor

$$u = \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 \dots + \alpha_k - \beta_1 - \beta_2 \dots - \beta_k > 0,$$

$$\lim (1-x)^u F(x) = \frac{\Pi(u-1) \Pi(\beta_1-1) \Pi(\beta_2-1) \dots \Pi(\beta_k-1)}{\Pi(\alpha-1) \Pi(\alpha_1-1) \Pi(\alpha_2-1) \dots \Pi(\alpha_k-1)},$$

$$x < 1, \quad \lim x = 1;$$

en, wanneer  $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 \dots + \alpha_k - \beta_1 - \beta_2 \dots - \beta_k = 0$  is,

$$\lim \frac{F(x)}{\lg \left( \frac{1}{1-x} \right)} = \frac{\Pi(\beta_1-1) \Pi(\beta_2-1) \dots \Pi(\beta_k-1)}{\Pi(\alpha-1) \Pi(\alpha_1-1) \dots \Pi(\alpha_k-1)},$$

$$x < 1, \quad \lim x = 1.$$

4. Neemt men in het theorema van Art. 2 voor de functie  $\psi(x)$  in het bijzonder

$$\psi(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots,$$

zoodat  $a_0 = a_1 = a_2 \dots = a_n = 1$ ,

dan volgt dus  $\lim (1-x) \{s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \dots\} = M$ ,

$$x < 1, \quad \lim x = 1,$$

$$\lim s_n = M \text{ voor } n = \infty.$$

Het theorema, in Art. 1 vermeld, is blijkbaar algemeener, want wanneer  $s_n = M$  is, zoo ziet men gemakkelijk dat hieruit volgt

$$\dots \quad \lim \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n} = M,$$

terwijl men uit dit laatste niet omgekeerd tot  $\lim s_n = M$  kan besluiten.

Deze omstandigheid gaf aanleiding om te onderzoeken, of nog niet bij andere aannamen omtrent de functie  $\psi(x)$  in het theorema van Art. 2 de voorwaarde  $\lim s_n = M$  vervangen kan worden door de ruimere

$$\lim \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n} = M;$$

en het bleek, dat dit werkelijk het geval is voor

$$\psi(x) = (1-x)^{-u} = 1 + \frac{u}{1} x + \frac{u(u+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots, \quad u > 0,$$

$$\psi(x) = \text{Lg} \left( \frac{1}{1-x} \right) = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \dots$$

Het bewijs zal hier alleen voor  $\psi(x) = (1-x)^{-u}$  gevoerd worden, daar het bewijs voor  $\psi(x) = \text{Lg} \left( \frac{1}{1-x} \right)$  hierna geen bezwaar zal opleveren.

Uit de onderstelling, dat

$$\lim \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n} = M, \text{ voor } n = \infty,$$

volgt, dat hoe klein een (positief) getal  $\varepsilon$  ook gegeven is, het altijd mogelijk is een geheel positief getal  $n$  zoo groot te kiezen, dat voor

$$\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n+k-1}}{n+k} = M + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

de getallen  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  allen, volstrekt genomen, kleiner dan  $\varepsilon$  zijn.

Zij nu verder

$$\left. \begin{aligned} P &= s_0 + \frac{u}{1} s_1 x + \frac{u(u+1)}{1 \cdot 2} s_2 x^2 + \dots + \frac{u(u+1) \dots (u+n-2)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} s_{n-1} x^{n-1}, \\ Q &= 1 + \frac{u}{1} x + \frac{u(u+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{u(u+1) \dots (u+n-2)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} x^{n-1}; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

terwijl ik herinner, dat

$$f(x) = s_0 + \frac{u}{1} s_1 x + \frac{u(u+1)}{1 \cdot 2} s_2 x^2 + \dots,$$

$$\psi(x) = 1 + \frac{u}{1} x + \frac{u(u+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots = (1-x)^{-u} \quad \text{is.}$$

Uit (6) volgt voor  $s_{n+k}$  de waarde

$$s_{n+k} = M + (n+k+1)\varepsilon_{k+1} - (n+k)\varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

waaruit gemakkelijk op te maken valt, dat de reeks  $f(x)$  voor  $0 < x < 1$  convergeert. Met behulp van (7) en (8) kan men nu  $f(x)$  aldus voorstellen.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= P + M((1-x)^{-n} - Q) - n(u)_{, \varepsilon_0} x^n + R + S, \\ R &= u(1-x) \sum_{k=1}^{k=\infty} (u+1)_{n+k-1} \varepsilon_k x^{n+k-1}, \\ S &= (1-u) \sum_{k=1}^{k=\infty} (u)_{n+k-1} \varepsilon_k x^{n+k-1}. \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

Hierin is ter bekorting door  $(u)$ , de coëfficiënt van  $x^n$  in de ontwikkeling van  $(1-x)^{-u}$  genoemd, dus  $(u)_p = \frac{u(u+1) \dots (u+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}$ .

Daar  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  allen, volstrekt genomen, kleiner dan  $\varepsilon$  zijn, zoo is de volstreekte waarde van  $R$  kleiner dan

$$\varepsilon u(1-x) \sum_1^{\infty} (u+1)_{n+k-1} x^{n+k-1},$$

en evenzoo de volstreekte waarde van  $S$  kleiner dan

$$\pm \varepsilon(1-u) \sum_1^{\infty} (u)_{n+k-1} x^{n+k-1}.$$

A fortiori zijn dus de volstreekte waarden van  $R$  en  $S$  kleiner dan respective

$$\varepsilon u(1-x) \sum_0^{\infty} (u+1)_k x^k = \varepsilon u(1-x)^{-u},$$

$$\pm \varepsilon(1-u) \sum_0^{\infty} (u)_k x^k = \pm \varepsilon(1-u)(1-x)^{-u}.$$

Stelt men dus  $u + \text{valabs}(1-u) = t; \dots \dots \dots (10)$

dan is de volstreekte waarde van  $R+S$  kleiner dan

$$\varepsilon t(1-x)^{-u} \text{ dus } R+S = \varepsilon y t(1-x)^{-u},$$

waarin  $y$  een positieve of negatieve echte breuk is.

Uit (9) volgt dus nu, door vermenigvuldiging met  $(1-x)^n$ ,

$$(1-x)^n f(x) = M + \{P - M Q - n(u)_{, \varepsilon_0} x^n\} (1-x)^n + \varepsilon y t, \quad (10)$$

De functie  $P - M Q - n(u)_{, \varepsilon_0} x^n$  is geheel rationaal in  $x$ , en neemt voor  $x=1$  noodzakelijk eene eindige waarde aan, zoodat  $\{P - M Q - n(u)_{, \varepsilon_0} x^n\} (1-x)^n$ , daar  $u$  positief is, stellig tot nul convergeert, wanneer  $x$ , steeds toenemend, onbepaald tot de eenheid nadert. Men kan dus, hoe klein ook een positieve grootheid  $\delta$  ook

gegeven is, altijd een positief getal  $\alpha$  bepalen zoo, dat voor alle waarden van  $x$  tusschen  $x = 1 - \alpha$  (incl.) en  $x = 1$  (excl.) de waarde van

$$\{P - QM - n(u)_{\epsilon_0} x^n\} (1-x)^n$$

kleiner dan  $\delta$  is (volstrekt genomen).

Het valt nu uit (11) gemakkelijk op te maken, dat werkelijk  $(1-x)^n f(x)$ , bij onbepaalde nadering van  $x$  tot 1, tot de limiet  $M$  convergeert, m. a. w. dat, hoe klein  $\beta$  ook gegeven is, men  $\alpha$  altijd zoo kan bepalen, dat voor alle waarden tusschen  $x = 1 - \alpha$  (incl.) en  $x = 1$  (excl.) de waarde van  $(1-x)^n f(x)$  minder van  $M$  verschilt dan  $\beta$ . Inderdaad, men neme twee positieve getallen  $\delta$  en  $\epsilon$  zoo, dat

$$\beta = \delta + t\epsilon.$$

Bij de waarde van  $\epsilon$  bepale men nu  $n$  zóó, dat de waarden van  $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  in (6) allen volstrekt kleiner dan  $\epsilon$  uitvallen. Nadat aldus  $n$ , en daarmee ook  $P$  en  $Q$ , bekend zijn, bepale men nu  $\alpha$  door de voorwaarde, dat, wanneer  $x$  niet meer dan  $\alpha$  van 1 verschilt,

$$\{P - MQ - n(u)_{\epsilon_0} x^n\} (1-x)^n,$$

volstrekt kleiner dan  $\delta$  is. Volgens (11) ligt dan voor deze waarden van  $x$   $(1-x)^n f(x)$  tusschen de grenzen  $M + \delta + t\epsilon$  en  $M - \delta - t\epsilon$ , d. i. tusschen  $M + \beta$  en  $M - \beta$ .

## EENIGE BEMERKINGEN OMTRENT DE DIFFERENTIAAL- QUOTIENTEN VAN EENE FUNCTIE VAN EENE VERANDERLIJKE,

DOOR

T. J. STIELTJES Jr.

Is eene functie  $f(x)$  voor alle waarden van  $x$ ,  $a \leq x \leq b$ , gegeven, en voor al deze waarden van  $x$  differentieërbaar, dan is

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi), \quad a < \xi < b \dots\dots\dots (A)$$

Hieruit volgt, dat, wanneer  $a$  en  $b$  tot een limiet  $X$  convergeeren, en  $f'(x)$  continue is voor  $x = X$ ,

$$\lim \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(X) \dots\dots\dots (B)$$

Dat voor de geldigheid van deze formule (B) de voorwaarde, dat  $f'(x)$  voor  $x = X$  continue is, noodzakelijk is, blijkt uit het volgende

VOORBEELD. Zij  $f(0) = 0$  en voor  $x \geq 0$ ,

$$f(x) = x^2 \cos \left( \frac{\pi}{x^2} \right).$$

De functie  $f(x)$  is dan continue en differentieërbaar voor alle waarden van  $x$ ; in het bijzonder is  $f'(0) = 0$ . Daarentegen is  $f'(x)$  niet overal continue, en namelijk discontinue voor  $x = 0$ .

Zij nu  $n$  een geheel positief getal, en

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad f(p_n) = (-1)^n \frac{1}{n},$$

dan volgt

$$\frac{f(p_n)-f(p_{n+1})}{p_n-p_{n+1}} = (-1)^n \left( \sqrt{\frac{n}{n+1}} + \sqrt{\frac{n+1}{n}} \right) (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}).$$

Neemt nu  $n$  in 't oneindige toe, dan convergeert  $p_n$  tot de limiet 0, en toch convergeert

$$\frac{f(p_n)-f(p_{n+1})}{p_n-p_{n+1}}$$

niet tot de waarde  $f'(0) = 0$ .

Men overtuigt zich zelfs gemakkelijk, dat, hoe klein een positief getal  $h$  ook gegeven is, men steeds twee positieve getallen  $p$  en  $q$ , beide kleiner dan  $h$ , kan bepalen, zoodanig dat

$$\frac{f(p)-f(q)}{p-q}$$

eene willekeurig voorgeschreven waarde aanneemt. Er kan dus geene sprake zijn van de convergentie van deze uitdrukking tot eene bepaalde limiet.

Wordt dus omtrent de wijze, waarop  $a$  en  $b$  tot hun limiet  $X$  convergeeren, niets naders bepaald, dan is de aangegeven voorwaarde, dat  $f'(x)$  voor  $x = X$  continue is, noodzakelijk voor de geldigheid van (B).

Zoodra echter vastgesteld wordt, dat  $a$  en  $b$  zoodanig tot hun

limiet  $X$  convergeeren, dat  $X$  steeds tusschen  $a$  en  $b$  blijft, of ten minste niet buiten het interval  $a-b$  valt, dan geldt de formule (B) reeds, zoodra slechts  $f(x)$  voor  $x = X$  een eindig differentiaal-quotient  $f'(X)$  heeft. Het is dan zelfs niet noodig, dat  $f(x)$  voor andere waarde van  $x$  differentieërbaar is.

Om dit te bewijzen heeft men niet van (A) uit te gaan, welke formule de differentieërbaarheid van  $f(x)$  voor alle waarden  $a \leq b \leq x$  onderstelt; maar kan rechtstreeks aldus te werk gaan.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(X) + f(X) - f(a)}{b - X + X - a}.$$

Ligt nu  $X$  in het interval  $a-b$ , dan hebben  $b-X$  en  $X-a$  hetzelfde teeken, waaruit volgt dat  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  ligt tusschen  $\frac{f(b) - f(X)}{b - X}$  en  $\frac{f(X) - f(a)}{X - a}$ , welke beide waarden volgens de onderstelling, dat  $f(x)$  voor  $x = X$  een eindig differentiaal-quotient heeft, tot  $f'(X)$  convergeeren; derhalve ook  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Het is duidelijk, dat  $a$  of  $b$  ook gelijk  $X$  mogen worden.

Als een voorbeeld kan de functie  $f(x)$  dienen, bepaald door  $f(0) = 0$  en, voor  $x \geq 0$ ,  $f(x) = \pm x^2$ ; waarin het bovenste of onderste teeken te nemen is, al naardat  $x$  meetbaar of onmeetbaar is. Deze functie heeft alleen voor  $x = 0$  een differentiaalquotient, waarvan de waarde door de formule (B) gevonden kan worden, zoolang 0 niet buiten het interval  $a-b$  valt.

De formule (A) vormt een bijzonder geval van de volgende meer algemeene, waarvan ik het bewijs elders <sup>1)</sup> gegeven heb.

$$\text{Zij} \quad r(z) = (z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_{n+1}), \\ x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n < x_{n+1};$$

$f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n-1)}(x)$  continue voor alle waarden van  $x$ ,  $x_1 \leq x \leq x_{n+1}$ ; terwijl voor deze zelfde waarden  $f^{(n-1)}(x)$  een eindig differentiaal-quotient  $f^{(n)}(x)$  heeft; dan is

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{f(x_p)}{r'(x_p)} = \frac{1}{1.2.3 \dots n} f^{(n)}(\xi), \quad x_1 < \xi < x_{n+1} \dots \text{(AA)}$$

Hieruit volgt, dat, wanneer  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  tot eene gemeenschappelijke limiet  $X$  convergeeren, en bovendien nog  $f^{(n)}(x)$  voor  $x = X$  continue is,

<sup>1)</sup> In het XVII<sup>de</sup> Deel van de Versl. en Med. der Kon. Akad. van Wetenschappen.

$$\sum_{r=1}^{r=n+1} \frac{f(x_r)}{r'(x_r)} = \frac{1}{1.2..n} f^{(n)}(X) \dots \dots \dots (BB)$$

Wij zagen reeds boven in het bijzonder geval  $n = 1$ , dat in het algemeen de voorwaarde omtrent de continuïteit van  $f^{(n)}(x)$  noodzakelijk is.

Wanneer echter ondersteld wordt dat, bij hunne convergentie tot  $X$ ,  $x_1$  en  $x_{n+1}$  steeds  $X$  insluiten, of ten minste  $X$  niet buiten het interval  $x_1, \dots, x_{n+1}$  valt, dan geldt de formule (BB) in veel wijder omvang; en wel is het dan voldoende, dat  $f^{n-1}(x)$  voor de bijzondere waarde  $x = X$  een eindig differentiaal-quotient  $f^{(n)}(X) = k$  heeft. Het is zelfs niet noodig, dat  $f^{n-1}(x)$  voor andere waarden van  $x$  differentieërbaar is, laat staan dan een continue differentiaal-quotient heeft, zooals boven ondersteld moest worden.

Het bewijs hiervan, dat het eigenlijke doel van deze mededeeling uitmaakt, kan aldus gevoerd worden.

$$\text{Zij} \quad \phi(x) = f(x) - \frac{k}{1.2..n} x^n,$$

dan zijn ook  $\phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{n-1}(x)$ ,

volkomen bepaald, en  $\phi^{n-1}(x)$  heeft voor  $x = X$  een eindig differentiaal-quotient  $\phi^{(n)}(X) = 0$ . In het voorbijgaan zij bemerkt, dat uit de onderstelling, dat  $f^{n-1}(x)$  voor  $x = X$  differentieërbaar is, reeds volgt, dat  $f^{n-1}(x)$  voor  $x = X$  continue is.

$$\begin{aligned} \text{Ik stel nu} \quad p(z) &= (z-x_1)(z-x_2) \dots (z-x_n), \\ q(z) &= (z-x_2)(z-x_3) \dots (z-x_{n+1}), \end{aligned}$$

dan is volgens (AA), wanneer men in deze formule  $n$  door  $n-1$  vervangt,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{\phi(x_r)}{p'(x_r)} &= \frac{1}{1.2..(n-1)} \phi^{(n-1)}(\xi), \quad x_1 < \xi < x_n, \\ \sum_{r=2}^{r=n+1} \frac{\phi(x_r)}{q'(x_r)} &= \frac{1}{1.2..(n-1)} \phi^{(n-1)}(\eta), \quad x_2 < \eta < x_{n+1}; \end{aligned}$$

en wel vereischen deze formules geenerlei onderstelling omtrent de differentieërbaarheid van  $\phi^{n-1}(x)$ .

Door aftrekking en deeling door  $x_{n+1} - x_1$  volgt nu

$$\sum_{r=1}^{r=n+1} \frac{\phi(x_r)}{r'(x_r)} = \frac{1}{1.2..(n-1)} \left\{ \frac{\phi^{(n-1)}(\eta) - \phi^{(n-1)}(\xi)}{x_{n+1} - x_1} \right\}.$$

Voor de rechts tusschen  $\{ \}$  geplaatste uitdrukking kan geschreven worden



$$\left( \frac{\eta - X}{x_{n+1} - x_1} \right) \frac{\phi^{(n-1)}(\eta) - \phi^{(n-1)}(X)}{\eta - X} + \\ + \left( \frac{X - \xi}{x_{n+1} - x_1} \right) \frac{\phi^{(n-1)}(X) - \phi^{(n-1)}(\xi)}{X - \xi}.$$

Daar  $\xi$  en  $\eta$  binnen het interval  $x_1 - x_{n+1}$  liggen, en  $X$  ten minste niet buiten dit interval ligt, zoo zijn

$$\frac{\eta - X}{x_{n+1} - x_1} \quad \text{en} \quad \frac{X - \xi}{x_{n+1} - x_1},$$

volstrekt genomen, kleiner dan 1. Verder volgt uit de onderstelling, dat  $\phi^{(n-1)}(x)$  voor  $x = X$  een eindig differentiaal-quotient  $\phi^{(n)}(X) = 0$  heeft, dat

$$\frac{\phi^{(n-1)}(\eta) - \phi^{(n-1)}(X)}{\eta - X} \quad \text{en} \quad \frac{\phi^{(n-1)}(X) - \phi^{(n-1)}(\xi)}{X - \xi}$$

tot de limiet 0 convergeeren, wanneer  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  allen tot hun limiet  $X$  convergeeren. Dus volgt ten slotte

$$\lim_{p=1}^{p=n+1} \frac{\phi(x_p)}{r'(x_p)} = 0,$$

of, daar  $\phi(x) = f(x) - \frac{k}{1.2..n} x^n$  was en identisch

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{x_p^n}{r'(x_p)} = 1 \quad \text{is,}$$

$$\lim_{p=1}^{p=n+1} \frac{f(x_p)}{r'(x_p)} = \frac{k}{1.2.3..n} = \frac{f^{(n)}(X)}{1.2.3..n},$$

waarmee het bedoelde bewijs geleverd is.

Men kan zeggen, dat deze formule altijd geldt, zoodra slechts  $f^{(n)}(X)$  eene bepaalde beteekenis heeft; want dit vordert reeds van zelf, dat  $f^{(n-1)}(x)$  in de nabijheid van  $x = X$  overal een eindige en continue veranderlijke waarde heeft; evenzoo wat  $f^{(n-2)}(x), f^{(n-3)}(x), \dots$  betreft.

Maar omgekeerd kan niet beweerd worden, dat altijd, wanneer

$$\lim_{p=1}^{p=n+1} \frac{r'(x_p)}{f(x_p)}$$

eene bepaalde eindige waarde heeft, deze waarde  $= \frac{f^{(n)}(X)}{1.2..n}$  is.

Want het kan zeer wel gebeuren, dat toch nog in dit geval  $f^{(n)}(X)$  niet bestaat. Dit blijkt, wanneer men bedenkt, dat door verandering van de waarde van  $f(x)$  voor  $x = X$  de boven-

staande uitdrukking niet van waarde verandert, zoolang geene der waarden  $x_1, \dots, x_{n+1}$  gelijk aan  $X$  is.

Ligt  $X$  buiten het interval  $x_1 - x_{n+1}$ , dan behoeven

$$\frac{\eta - X}{x_1 - x_{n+1}} \quad \text{en} \quad \frac{X - \xi}{x_1 - x_{n+1}},$$

geene echte breuken meer te zijn, en deze omstandigheid belet dan het bewijs ten einde te voeren. Maar wij zagen reeds door een voorbeeld, dat in dit geval omtrent  $f^{n-1}(x)$  verdere onderstellingen noodig zijn, namelijk, dat in 't algemeen  $f^n(x)$  bestaat en voor  $x = X$  continue is.

## OVER DE TRANSFORMATIE VAN DE PERIODIEKE FUNCTIE

$$A_0 + A_1 \cos \phi + B_1 \sin \phi \dots + A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi,$$

DOOR

**T. J. STIELTJES Jr.**

Het groote nut, dat men in veel gevallen kan trekken uit de ontbinding in factoren van eene uitdrukking van bovengenoemden vorm, schijnt mij de volgende eenvoudige ontwikkeling van hetgeen hierop betrekking heeft te wettigen.

Voor het geval, dat  $n = 2$  is, en de uitdrukking voor geene waarde van  $\phi$  gelijk aan 0 wordt, heeft men deze ontbinding in factoren bij de ontwikkeling der storingsfunctie sedert lang toegepast, en in Art. 54 van de „*Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten*“, eerste Abhandlung, zegt HANSEN in een noot: „Die allgemeine Theorie der Auflösung des Polynomen

$$X = \gamma_0 + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x + \gamma_3 \cos 3x + \dots \\ + \sin x \cdot \{ \beta_0 + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos 2x + \dots \}$$

in Factoren habe ich in meiner Pariser Preisschrift vollständig entwickelt." Ik heb van de hier aangevoerde „*Mémoire sur les perturbations qu'éprouvent les comètes*”, geen inzage kunnen nemen; en de vorm, waarin HANSEN de vraag stelt, zou misschien kunnen doen vermoeden, dat de daar gegeven behandeling eenigzins afwijkt van de volgende.

Overigens wil het volgende niets anders zijn dan een beknopte samenstelling van de formules, die voor de besproken herleiding noodig zijn.

Omtrent de (reële) coëfficiënten  $A_k, \dots B_k, \dots$  in de uitdrukking

$$A_0 + A_1 \cos \phi + A_2 \cos 2\phi + \dots + A_n \cos n\phi + \\ + B_1 \sin \phi + B_2 \sin 2\phi + \dots + B_n \sin n\phi$$

zal alleen ondersteld worden, dat  $A_n$  en  $B_n$  niet beide gelijktijdig gelijk nul zijn, wat blijkbaar geene schade aan de algemeenheid doet. Ter bekorting zal bovenstaande uitdrukking door  $F(\phi)$  aangeduid worden, en verder zij

$$e^{\phi i} = \cos \phi + i \sin \phi = z,$$

dus

$$e^{-\phi i} = \cos \phi - i \sin \phi = z^{-1},$$

dan is

$$2F(\phi) = 2A_0 + A_1(z + z^{-1}) + A_2(z^2 + z^{-2}) + \dots + A_n(z^n + z^{-n}) - \\ - B_1 i(z - z^{-1}) - B_2 i(z^2 - z^{-2}) - \dots - B_n i(z^n - z^{-n}),$$

of wel

$$2z^n F(\phi) = G(z),$$

wanneer gesteld wordt

$$G(z) = (A_n - B_n i)z^{2n} + (A_{n-1} - B_{n-1} i)z^{2n-1} + \dots + (A_1 - B_1 i)z^{n+1} + 2A_0 z^n + \\ + (A_1 + B_1 i)z^{n-1} + (A_2 + B_2 i)z^{n-2} + \dots + (A_n + B_n i).$$

De gebroken functie  $\frac{1}{2} z^{-n} G(z)$  neemt dus voor  $z = e^{\phi i}$ , d. w. z. voor waarden van  $z$  met den modulus 1, de waarde  $F(\phi)$  aan. De geheele functie van den  $2n^{\text{den}}$  graad  $G(z)$  heeft nu blijkbaar deze eigenschap dat

$$z^{2n} G\left(\frac{1}{z}\right)$$

toegevoegd is met  $G(z)$ , en dit heeft eene bijzondere eigenschap van de wortels der vergelijking  $G(z) = 0$  ten gevolge. Zij namelijk

$$G(z) = (A_n - B_n i)(z - p_1 e^{\phi_1 i})(z - p_2 e^{\phi_2 i}) \dots (z - p_{2n} e^{\phi_{2n} i}),$$

dan moet de uitdrukking rechts onveranderd blijven, wanneer men

$z$  door  $\frac{1}{z}$  vervangt, vervolgens met  $z^{2n}$  vermenigvuldigt, eindelijk  $i$  in  $-i$  verandert; dus

$$G(z) = (A_n - B_n i)(1 - p_1 e^{-\theta_1 i} z)(1 - p_2 e^{-\theta_2 i} z) \dots (1 - p_{2n} e^{-\theta_{2n} i} z).$$

Volgens de eerste ontbinding zijn de gezamenlijke wortels van de vergelijking  $G(z) = 0$ , elk dezer wortels zooveel maal neergeschreven als door den graad van veelvoudigheid wordt aangewezen,

$$p_1 e^{\theta_1 i}, p_2 e^{\theta_2 i}, \dots p_{2n} e^{\theta_{2n} i},$$

en volgens de tweede ontbinding

$$\frac{1}{p_1} e^{\theta_1 i}, \frac{1}{p_2} e^{\theta_2 i}, \dots \frac{1}{p_{2n}} e^{\theta_{2n} i}.$$

Daar nu deze beide groepen alleen in volgorde kunnen verschillen, zoo blijkt hieruit, dat, wanneer  $p_1 e^{\theta_1 i}$  een  $r$ -voudige wortel is, ook  $\frac{1}{p_1} e^{\theta_1 i}$  een  $r$ -voudige wortel is.

De gezamenlijke wortels van de vergelijking  $G(z) = 0$  kunnen dus in twee groepen gesplitst worden.

Vooreerst de wortels met een modulus verschillend van 1. Deze wortels kunnen voorgesteld worden door

$$r_1 e^{u_1 i}, r_2 e^{u_2 i}, \dots r_k e^{u_k i},$$

$$\frac{1}{r_1} e^{u_1 i}, \frac{1}{r_2} e^{u_2 i}, \dots \frac{1}{r_k} e^{u_k i},$$

waarin  $r_1, r_2, \dots, r_k$  allen kleiner dan 1 zijn.

Het geheele aantal dezer wortels is even,  $= 2k$ .

Ten tweede de wortels met een modulus 1. Deze mogen zijn

$$e^{v_1 i}, e^{v_2 i}, \dots e^{v_{2l} i}.$$

Hun aantal  $= 2l$  is evenzeer even, en

$$k + l = n.$$

Het is trouwens duidelijk, dat  $v_1, v_2, \dots, v_{2l}$  de wortels zijn van

$$F(\phi) = 0,$$

en daar  $F(\phi)$ , bij vermeerdering van  $\phi$  met  $2\pi$ , dezelfde waarde aanneemt, zoo valt hieruit reeds op te maken, dat het aantal dezer wortels even moet zijn.

Hierbij is nog op te merken, dat uit

$$2z^n F(\phi) = G(z)$$

door differentiatie naar  $z$  volgt  $\left(\frac{d\phi}{dz} = -iz^{-1}\right)$ ,

$$z^{n-1} [2nF(\phi) - 2iF'(\phi)] = G'(z),$$

$$z^{n-2} [2n(2n-1)F(\phi) - 2(2n-1)iF'(\phi) + 2F''(\phi)] = G''(z),$$

enz.

waaruit blijkt, dat, wanneer voor zekere waarde van  $z$

$$G(z), G'(z), G''(z), \dots G^{(r-1)}(z),$$

allen  $= 0$  worden, en  $G^{(r)}(z)$  niet  $= 0$  is, dat dan voor de bijbehorende waarde van  $\phi$  ook

$$F(\phi), F'(\phi), \dots F^{(r-1)}(\phi),$$

gelijk nul zijn, en  $F^{(r)}(\phi)$  niet  $= 0$  is; zoodat een  $r$ -voudige wortel van  $G(z) = 0$  overeenkomt met een  $r$ -voudigen wortel van  $F(\phi) = 0$ .

Wat  $u_1, u_2, \dots u_k, v_1, v_2, \dots v_2$  betreft, wgens de periodiciteit der exponentiaal-functie kan men elk dezer waarden met een willekeurig veelvoud van  $2\pi$  vermeerderen of verminderen, en ze dus allen bijv.  $> 0$  en  $< 2\pi$  onderstellen. Het is voor het volgende overigens geheel onverschillig, hoe de bepaling hierover getroffen wordt, wanneer slechts aan de eenmaal aangenomen waarden vastgehouden wordt.

Na dit alles is dus

$$G(z) = (A_n - B_n i) \times T \times U \times V,$$

$$T = (z - r_1 e^{u_1 i}) \dots (z - r_k e^{u_k i}),$$

$$U = \left(z - \frac{1}{r_1} e^{u_1 i}\right) \dots \left(z - \frac{1}{r_k} e^{u_k i}\right),$$

$$V = (z - e^{v_1 i})(z - e^{v_2 i}) \dots (z - e^{v_2 i});$$

en dus voor  $z = e^{\phi i}$

$$F(\phi) = \frac{1}{2} e^{-u \phi i} (A_n - B_n i) \times T \times U \times V.$$

Door nu de factoren van  $T, U, V$  respectieve aldus te herleiden

$$e^{\phi i} - r_1 e^{u_1 i} = e^{u_1 i} \times (e^{(\phi - u_1) i} - r_1),$$

$$e^{\phi i} - \frac{1}{r_1} e^{u_1 i} = e^{\phi i} \times \left(1 - \frac{1}{r_1} e^{-(\phi - u_1) i}\right),$$

$$e^{\phi i} - e^{v_1 i} = e^{\frac{1}{2}(\phi + v_1) i} (e^{\frac{1}{2}(\phi - v_1) i} - e^{-\frac{1}{2}(\phi - v_1) i}),$$

en vervolgens gebruik te maken van de identiteiten

$$(e^{(\phi - u_1) i} - r_1) \left(1 - \frac{1}{r_1} e^{-(\phi - u_1) i}\right) = -\frac{1}{r_1} (1 - 2r_1 \cos(\phi - u_1) + r_1^2),$$

$$e^{\frac{1}{2}(\phi - v_1) i} - e^{-\frac{1}{2}(\phi - v_1) i} = 2i \sin \frac{1}{2}(\phi - v_1),$$

komt er

$$F(\phi) = C [1 - 2r_1 \cos(\phi - u_1) + r_1^2] \times \dots \times [1 - 2r_k \cos(\phi - u_k) + r_k^2] \times \\ \times \sin \frac{1}{2}(\phi - v_1) \cdot \sin \frac{1}{2}(\phi - v_2) \dots \sin \frac{1}{2}(\phi - v_2);$$

waarin

$$C = (-1)^n 2^{2l-1} (A_n - B_n) e^{\frac{1}{2}(v_1 + v_2 + \dots + v_{2l} + 2u_1 + \dots + 2u_k)} (r_1 r_2 \dots r_k)^{-1}.$$

Bepaalt men  $R$  en  $\alpha$  zoodanig, dat

$$A_n + B_n i = R e^{\alpha i},$$

dus

$$A_n - B_n i = R e^{-\alpha i}$$

is, dan volgt voor het product van alle wortels der vergelijking  $G(z) = 0$  de waarde  $e^{2\alpha i}$ , dus

$$e^{2\alpha i} = e^{(v_1 + v_2 + \dots + v_{2l} + 2u_1 + \dots + 2u_k) i},$$

of wel  $2\alpha + 2m\pi = v_1 + v_2 + \dots + v_{2l} + 2u_1 + 2u_2 + 2u_k$ ;

waarin  $m$  een geheel getal is, waarvan de waarde door deze vergelijking volkomen bepaald wordt, wanneer men eenmaal de waarden van  $v_1, \dots, v_{2l}, u_1, \dots, u_k$  en  $\alpha$  op bepaalde wijze aangenomen heeft.

De waarde van  $C$  wordt nu

$$(-1)^n 2^{2l-1} R e^{-\alpha i} e^{u+m\pi} (r_1 r_2 \dots r_k)^{-1},$$

$$\text{of} \quad C = (-1)^{n+m} 2^{2l-1} R (r_1 r_2 \dots r_k)^{-1}.$$

Hier ten slotte de samenstelling van alle formules.

$$F(\phi) = A_0 + A_1 \cos \phi + A_2 \cos 2\phi + \dots + A_n \cos n\phi + \\ + B_1 \sin \phi + B_2 \sin 2\phi + \dots + B_n \sin n\phi,$$

$$G(z) = (A_n - B_n i) z^{2n} + (A_{n-1} - B_{n-1} i) z^{2n-1} + \dots + (A_1 - B_1 i) z^{n-1} + \\ + 2A_0 z^n + (A_1 + B_1 i) z^{n-1} + (A_2 + B_2 i) z^{n-2} + \dots + A_n + B_n i.$$

Wortels van  $G(z) = 0$

$$r_1 e^{u_1 i}, \quad r_2 e^{u_2 i}, \quad r_k e^{u_k i}, \\ \frac{1}{r_1} e^{-u_1 i}, \quad \frac{1}{r_2} e^{-u_2 i}, \quad \frac{1}{r_k} e^{-u_k i}, \\ e^{v_1 i}, \quad e^{v_2 i}, \quad e^{v_{2l} i},$$

$r_1, r_2, \dots, r_k$  kunnen allen kleiner dan 1 genomen worden;

$$A_n + B_n i = R e^{\alpha i},$$

$$2\alpha + 2m\pi = v_1 + v_2 + \dots + v_{2l} + 2(u_1 + u_2 + \dots + u_k),$$

$$C = (-1)^{n+m} 2^{2l-1} R (r_1 r_2 \dots r_k)^{-1},$$

$$F(\phi) = C \times \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} [1 - 2r_p \cos(\phi - u_p) + r_p^2] \times \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \sin \frac{1}{2}(\phi - v_p).$$

Om een enkel voorbeeld te geven, zij

$$F(\phi) = 4 - 3\sqrt{2} \sin \phi - 2\sqrt{2} \cos \phi^2.$$

Men vindt, dat  $F(\phi)$ ,  $F'(\phi)$ ,  $F''(\phi)$  voor  $\phi = 45^\circ$  nul worden, terwijl  $F'''(\phi)$  niet  $= 0$  is, dus

$$v_1 = v_2 = v_3 = 45^\circ.$$

Een vierde wortel van  $F(\phi) = 0$  vindt men door benadering

$$v_4 = 106^\circ 35' 45''.4.$$

Nadat aldus vier wortels van de zesde-machtsvergelijking  $G(z) = 0$  gevonden zijn, is het gemakkelijk de beide overige  $re^{u+i}$  en  $\frac{1}{r}e^{u-i}$  te bepalen. Ik verkrijg ten slotte

$$F(\phi) = C[1 - 2r \cos(\phi - u) + r^2] \sin \frac{1}{2}(\phi - v_1)^2 \sin \frac{1}{2}(\phi - v_4),$$

$$Lg C = 1.268505,$$

$$Lgr = 9.484070 - 16,$$

$$u = 239^\circ 12' 7''.3,$$

$$v_1 = 45^\circ,$$

$$v_4 = 106^\circ 35' 45''.4.$$

# OVER EEN PAAR MET ELKAAR SAMENHANGENDE INVOLUTORISCHE BIRATIONEELE TRANSFORMATIES,

DOOR

P. H. SCHOUTE.

~~~~~

In het zevende deel van dit tijdschrift komt onder den titel „Over twee met betrekking tot een driehoek symmetrische groepen van drie cirkels en over twee dergelijke groepen van drie rechte lijnen”, van de hand des hoogleeraars F. J. VAN DEN BERG, een verhandeling voor over twee bepaalde transformaties in het platte vlak. De stof wordt daarin verwerkt op analytische wijs en wel met behulp van het trilineaire coördinatenstelsel. Terwijl ik nu de eenvoudige theorie van de birationeele transformaties bekend onderstel <sup>1)</sup>, wensch ik in het volgende te doen zien, hoe de door den Heer VAN DEN BERG verkregene uitkomsten een onmiddellijk uitvloeisel zijn van deze theorie, en zij met behulp van deze theorie kunnen worden uitgebreid. Wijl de overeenkomst der symmetrische lijnengroepen de eenvoudigste is, behandel ik deze het eerst. Daarna ga ik tot de overeenkomst der symmetrische cirkelgroepen over, om vervolgens door middel van de bekende verwantschap der wederkeerige voerstralen, de eene overeenkomst in de andere te doen overgaan, en met uitbreiding van beide transformaties op de ruimte te eindigen.

## I. De lijnenovereenkomst.

1. „Wanneer men de hoekpunten van een driehoek ABC (fig. 1) met een willekeurig punt O verbindt en men deze drie verbindingslijnen om de deellijnen van de hoeken van den driehoek omslaat, dan verkrijgt men drie nieuwe lijnen door een punt O’.”

---

<sup>1)</sup> Hieromtrent kan men raadplegen DEWULF, *Bulletin des sciences math. et astron.*, Vol. V, page 200; CLEBSCH-LINDEMANN, *Geometrie*, Seite 478, enz.



Omdat de lijnen AO, BO, CO door een punt O gaan, is

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(A-\alpha)} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(B-\beta)} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(C-\gamma)} = 1,$$

wat men met behulp van den sinusregel in de driehoeken onmiddellijk vindt. Maar omgekeerd volgt dan uit deze betrekking, dat de drie nieuwe lijnen eveneens door een punt gaan, het punt O'.

2. Wilt met een willekeurig punt O in het algemeen een bepaald punt O' wederkeerig overeenstemt, is de bedoelde overeenkomst een involutorische transformatie van CREMONA.

Daar de beide punten O en O' de brandpunten kunnen zijn van een kegelsnee, die de drie zijden van driehoek ABC aanraakt, is de overeenkomst tevens die tusschen de brandpunten <sup>1)</sup> eener kegelsnee, die drie lijnen aanraakt.

3. Met elk der hoekpunten van driehoek ABC komt de overstaande zijde overeen; deze punten zijn dus enkelvoudige fundamenteelpunten met de overstaande zijden tot fundamenteallijnen. Zij zijn de eenigen, wilt bij elk ander punt O een bepaald punt O' behoort.

4. Wilt met een lijn door een der hoekpunten van den driehoek klaarblijkelijk een rechte lijn door hetzelfde hoekpunt overeenstemt, komt met een willekeurige lijn een kegelsnee door de drie punten A, B, C, en met het net der lijnen het net der kegelsneden overeen.

Dit is ook uit zich zelf duidelijk. Neemt men op een willekeurige lijn een willekeurig punt P aan, en laat men dit punt P de lijn doorloopen, dan zijn de stralenbundels AP en BP perspectivisch; de stralenbundels AP' en BP', die met betrekking tot de eersten symmetrisch liggen ten opzichte van de deellijnen der hoeken A en B, zijn dus projectivisch; zoodat de meetkundige plaats van de snijpunten der overeenkomende stralen een kegelsnee is door A, B en ook door C; wat gebleken zou zijn, als we bij de redeneering in plaats van een der punten A of B het punt C genomen hadden.

---

<sup>1)</sup> In de theorie der kegelsneden treft men meer dergelijke transformaties aan. Ik noem slechts de overeenkomst tusschen de beide assen eener kegelsnee, die drie lijnen aanraakt, of door drie punten gaat, eene bilineaire overeenkomst van lijnen, enz. In deze beide gevallen komt met een willekeurige lijn een kromme van de vierde klasse overeen, en zijn er zes enkelvoudige fundamenteallijnen en een drievoudige fundamenteallijn. Is de laatste lijn in beide gevallen de lijn in het oneindige, de zes enkelvoudige fundamenteallijnen zijn in het eerste geval de zes deellijnen van de drie hoeken des driehoeks, in het tweede geval de drie lijnen, door het middelpunt van den ingeschreven cirkel loodrecht op de zijden en de drie lijnen, die de middens der zijden twee aan twee verbinden.

In het bijzonder volgt hieruit, dat met de lijn in het oneindige de om driehoek ABC beschreven cirkel overeenstemt. Want voor die lijn zijn de stralenbundels AP en BP gelijk, wat dan ook met hun symmetrischen AP' en BP' het geval zijn zal.

In verband met het slot van art. 2, voert de laatste opmerking tot de bekende stelling, dat de meetkundige plaats van de brandpunten der parabolen, die de zijden eens driehoeks aanraken, de om dezen driehoek beschreven cirkel is.

5. Er zijn vier punten en zes lijnen, die met zich zelf overeenkomen, de vier middelpunten van de in- en aangeschreven cirkels en de zes deellijnen der hoeken, die deze punten twee aan twee verbinden. Op de bekende wijs duid ik de middelpunten aan door  $M$ ,  $M_+$ ,  $M_-$ , en de zes deellijnen door  $A_+$ ,  $A_-$ ,  $B_+$ ,  $B_-$ ,  $C_+$ ,  $C_-$ , waarbij dan het plusteeken het middendoordeelen van den hoek zelf, het minusteeken het middendoordeelen der buitenhoeken aanwijst.

In verband met het slot van art. 2 is het bovenstaande insgelijks zeer duidelijk.

6. Met een kegelsnee door twee der drie hoekpunten bijv. A en B komt weer een kegelsnee door A en B overeen. Want terwijl met een willekeurige kegelsnee, die door geen der hoekpunten gaat, een kromme van den vierden graad met dubbelpunten in A, B, C moet overeenstemmen, scheidt zich voor het punt A de lijn BC, en voor het punt B de lijn AC, van deze kromme af.

Gaat de kegelsnee, behalve door A en B, ook door twee der vier punten  $M$ , die niet met een der beide hoekpunten in een rechte lijn liggen, bijv. M en  $M_+$  of  $M_-$  en  $M_+$ , dan komt de kegelsnee met zich zelf overeen. Want de bundel der kegelsneden door A, B, M en  $M_+$  snijdt de lijn  $M_+M_-$  of  $C_-$  volgens een involutie, waarvan  $M_+$  en  $M_-$  de dubbelpunten zijn; deze involutie is dus identisch met de involutie der met elkaar overeenstemmende punten op  $C_-$  (want de dubbelpunten van deze zijn ook  $M_+$  en  $M_-$ ), waaruit volgt, dat elke kegelsnee door A, B, M,  $M_+$  zes punten met haar overeenkomstige kromme (deze vier punten en twee punten op  $C_-$ ) gemeen heeft, en zij dus met haar overeenkomstige kromme samenvalt. Wjl de punten der kegelsnee, die op  $C_-$  liggen, met elkaar overeenkomen, en de verbindingslijnen van de involutorisch met elkaar overeenkomende punten der kegelsnee door een punt, het involutiecentrum<sup>1)</sup>, moeten gaan, ligt dit punt voor elk der kegelsneden door A, B, M,

<sup>1)</sup> Vergelijk REYE, *Geometrie der Lage*, 2<sup>te</sup> Auflage, Abtheilung I, Seite 118.

$M$ , op  $C_-$ , en is  $C_-$  dus de meetkundige plaats der involutiecentra van de tot dezen bundel behorende kegelsneden. Wat met betrekking tot de vijf andere bundels op dezelfde wijs ook van de vijf andere lijnen, die met zich zelf overeenkomen, kan worden gezegd.

7. Met den stralenbundel der lijnen  $l$ , die door een punt  $M$  gaan, komt de bundel kegelsneden overeen, waarvan  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en het bedoelde punt  $M$  de basispunten zijn. De raaklijnen in  $M$  aan die kegelsneden getrokken vormen een stralenbundel  $l'$ , die projectief is met den bundel  $l$ . Maar deze beide stralenbundels moeten samenvallen, wijl ze drie stralen, de lijnen  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$ , overeenkomstig gemeen hebben. Hieruit volgt, dat iedere kromme, die door een punt  $M$  gaat, in dit punt aangeraakt wordt door haar overeenkomstige kromme. En wanneer een der punten  $M$  een veelvoudig punt is van een kromme, ligt dit punt een even groot aantal malen op de overeenkomstige kromme, en wordt deze in dit punt door de raaklijnen der oorspronkelijke kromme aangeraakt.

Deze uitkomst sluit die van het vorige artikel in zich. Want de twee met elkaar overeenkomende kegelsneden door  $A$ ,  $B$ ,  $M$  en  $M$ , hebben reeds zes punten gemeen, de twee punten  $A$  en  $B$  en de twee punten  $M$  en  $M$ , met de raaklijnen in die twee punten. En omgekeerd zou de uitkomst van het vorige artikel hebben kunnen leiden tot die, welke wij het laatst vonden.

8. Op iedere lijn liggen twee punten, die wederkeerig met elkaar overeenkomen; de punten, waarin de lijn de met haar overeenkomende kegelsnee snijdt. Zoo komen op de lijn in het oneindige de beide onbestaanbare cirkelpunten met elkaar overeen. Waaruit dus volgt, dat met een cirkel door twee der hoekpunten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  weer een cirkel door deze beide punten overeenkomt, enz.

Gemakkelijk blijkt, dat het voorgaande de oplossing bevat van het vraagstuk een kegelsnee te construeeren, die drie gegeven lijnen aanraakt en haar brandpunten heeft op een vierde lijn.

9. De meetkundige plaats der punten, die op de lijnen door een punt  $P$  met elkaar overeenkomen, is een met zich zelf overeenkomende kromme  $L$ , van den derden graad. Want terwijl de kromme eenmaal door  $P$  gaat, bevat elke lijn door  $P$  behalve  $P$  nog twee punten der meetkundige plaats. Deze kromme raakt in  $P$  de bindingslijn van  $P$  met het overeenkomstige punt  $P'$  aan; zij gaat door de punten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (wjl op de lijn  $PA$  met  $A$  het snijpunt dier lijn met  $BC$  overeenstemt) en door de punten  $M$ .

De gevondene kromme is de meetkundige plaats van de snijpunten

der overeenkomstige krommen van twee projectivische bundels, den stralenbundel P en den bundel der overeenkomstige kegelsneden door A, B, C en P'. Hieruit volgt ook, dat de meetkundige plaats de bovengenoemde kenmerken heeft.

Elke kromme van den derden graad, die door A, B, C en de vier punten M gaat, moet ook reeds om deze reden met zich zelf overeenkomen, dat met haar een kromme van dezelfde soort overeenkomt, en zij met de overeenkomstige kromme reeds elf punten gemeen heeft, een in elk der hoekpunten, en twee in elk der punten M. Het net der krommen  $L_3$ , door de zeven punten, komt daarbij echter volgens het voorgaande met het net der punten P van het vlak projectief overeen.

Vroeger heb ik bij een bundel krommen van den derden graad met zeven vaste basispunten de overeenkomst beschouwd, die door de beide overige bewegelijk gedachte basispunten wordt opgeleverd (Association française, Congres van Montpellier, 1879); van deze overeenkomst vormt de thans beschouwde een zeer bijzonder geval (vergelijk blz. 20, fig. 1, 2<sup>de</sup> kolom, het middelvakje, waarbij de drie punten 1 de hoekpunten A, B, C, en de vier punten zonder cijfer de vier punten M voorstellen).

10. Na het voorgaande is het niet moeielijk andere krommen aan te wijzen, die met zich zelf overeenkomen. Hierbij moet men in hoofdzaak op vier punten letten en zorgen 1°. dat de nieuwe kromme van denzelfden graad wordt als de oude, waartoe men deze een behoorlijk aantal malen door de basispunten moet laten gaan; 2°. dat het aantal enkelvoudige voorwaarden, equivalent met het gaan van de kromme door de aangewezen enkelvoudige en veelvoudige punten, niet grooter is dan  $\frac{n(n+3)}{2}$ ; 3°. dat de bepalende enkelvoudige en veelvoudige punten zoo gekozen worden, dat er door deze punten een enkelvoudige kromme van den verlangden graad mogelijk is; en 4°. dat het aantal punten gemeen aan de kromme en de met haar overeenkomende zeker grooter dan  $n^2$  is. Zoo komt men tot volgende uitkomsten.

Alle krommen  $L_4$ , die een dubbelpunt hebben in A en in M en eenmaal gaan door de punten B, C,  $M_b$ ,  $M_c$  en een paar punten O en O', — krommen, die ik voorstel door het symbool  $4(A^3BC, M^3M_bM_c, OO')$ , — komen met zich zelf overeen. Eveneens alle krommen  $L_5$ , gekenmerkt door  $5(A^3B^2C, M^3M_b^2M_c^2M_e, OO')$ ; alle krommen  $L_6$ , gekenmerkt door  $6(A^3B^2C^2, M^3M_b^2M_c^3M_e^2, OO')$ , enz.

Bij deze nieuwe krommen zullen echter de lijnen, die de overeenkomstige punten verbinden, niet door een punt gaan, maar een kromme omhullen.

11. Het voorgaande blijft in hoofdzaak onveranderd, wanneer men het omslaan van de verbindingslijnen van het punt O met de hoekpunten om de deellijnen der hoeken heen door het omzetten van de segmenten vervangt, die de des noods verlangde verbindingslijnen op de overstaande zijden bepalen. Men verkrijgt hierdoor ook (fig. 2) drie nieuwe lijnen door een punt O'. Want wijl de drie lijnen Aa, Bb, Cc door een punt O gaan, is volgens de stelling van DE CEVA

$$\frac{bC}{Ab} \cdot \frac{cA}{Bc} \cdot \frac{aB}{Ca} = 1,$$

en dus ook 
$$\frac{A'b'}{b'C} \cdot \frac{Bc'}{c'A} \cdot \frac{Ca'}{a'B} = 1;$$

wat bewijst, dat de nieuwe lijnen Aa', Bb', Cc' insgelijks door een punt gaan. Men heeft hier dus ook met een involutorische overeenkomst van CREMONA te doen. In het volgende zal ik alleen aanwijzen, waarin deze nieuwe overeenkomst van de oude verschilt.

12. Het tweede bewijs in art. 4 ondergaat een kleine wijziging. Met de lijn in het oneindige komt geen cirkel overeen, maar een ellips, die in de punten A, B, C aangeraakt wordt door lijnen evenwijdig aan de overstaande zijden van den driehoek. Alleen in geval de driehoek ABC gelijkzijdig is, wordt deze ellips weer een cirkel. Maar dit geval sluit ik uit, omdat dit nieuwe geval dan geheel met het oude identisch wordt. De onbestaanbare cirkelpunten in het oneindige nemen bij deze nieuwe transformatie dus geen bijzondere plaats in.

De vier punten, die met zich zelf overeenkomen, zijn hier het zwaartepunt en de snijpunten der lijnen, door de hoekpunten evenwijdig aan de overstaande zijden getrokken.

Anders blijft alles onveranderd doorgaan.

13. Vereenigt men ter verkrijging van een bij een willekeurig punt O behoorend punt O' de beide bewerkingen, het omstaan der lijnen AO, BO, CO om de deellijnen der hoeken, en het omzetten der segmenten op de zijden; dan verkrijgt men weer een overeenkomst, die weinig van de voorgaande verschilt. Met de lijn in het oneindige komt dan weer een andere kegelsnee om ABC overeen; de punten M worden door andere vervangen; maar anders blijft alles bij het oude.

De verschillende overeenkomsten, die we tot hier verkregen, zijn verschillende bijzondere gevallen van de algemeene kwadratische overeenkomst, waarbij de drie hoekpunten van driehoek  $ABC$  de eenige en wel enkelvoudige fundamenteelpunten zijn.

## II. De cirkelovereenkomst.

14. „Snijden de drie cirkels  $\alpha, \beta, \gamma$  (fig. 3), die op de drie zijden  $BC, CA, AB$  van een driehoek  $ABC$  als koorden beschreven zijn, elkaar in een punt  $O$ , en brengt men elk der cirkels door wenteling om de koorde, waarop hij beschreven is, met betrekking tot deze koorde in den symmetrischen stand  $\alpha', \beta', \gamma'$ , dan snijden deze nieuwe cirkels elkaar weer in een punt  $O'$ .”

Wanneer men de hoeken  $BOC, COA, AOB$ , die in de op de zijden  $BC, CA, AB$  als koorden beschreven cirkelsegmenten vervat zijn, door  $a, b, c$  voorstelt, heeft men

$$a + b + c = 360^\circ,$$

daar de cirkels  $\alpha, \beta, \gamma$  door een punt  $O$  gaan. Maar in den vorm

$$b = (180^\circ - a) + (180^\circ - c)$$

wijst deze vergelijking ook aan, dat het snijpunt  $O'$  der cirkels  $\alpha'$  en  $\gamma'$  op  $\beta'$  ligt, enz.

15. De punten  $O$  en  $O'$  vormen een involutorische overeenkomst van CREMONA.

16. Met elk der hoekpunten van driehoek  $ABC$  komt een cirkel overeen, de cirkel, dien men verkrijgt door den om den driehoek (fig. 4) beschreven cirkel om de overstaande zijde om te slaan. Deze drie cirkels gaan allen door het snijpunt  $D$  der loodlijnen, uit de hoekpunten op de overstaande zijden neergelaten. Want in omgeschreven cirkel en driehoek heeft men

$$Ba \cdot aC = Aa \cdot aD',$$

$$Ba \cdot aC = Aa \cdot Da,$$

waaruit volgt, dat de stukken  $Da$  en  $aD'$ , gelijk zijn, en de omgeschreven cirkel na het omslaan om  $BC$  door  $D$  gaat. Dus komt omgekeerd met dit snijpunt  $D$  een cirkel, de cirkel  $ABC$ , overeen. Wijl nu met elk der vier punten  $A, B, C, D$  een kromme van den tweeden graad (telkens de cirkel door de drie andere punten) overeenstemt, zijn deze punten tweevoudige fundamenteelpunten der transformatie met cirkels tot fundamentealkrommen.

17. Wijl twee fundamentealkrommen elkaar slechts in fundamenteelpunten kunnen snijden, zijn de beide onbestaanbare cirkelpunten

in het oneindige  $w$  en  $w'$  ook fundamenteaalpunten. Straks zal blijken wat de veelvoudigheid dier punten is.

18. Neemt men  $O$  in het oneindige, dan ligt  $O'$  ook in het oneindige; voorshands blijkt echter niet waar.

19. De drie zijden van driehoek  $ABC$  komen met zich zelf overeen. Op elk dezer zijden vormen de met elkaar overeenkomende punten een involutie, waarvan een der dubbelpunten (volgens art. 18) in het oneindige ligt (een zoogenaamde hyperbolisch gelijkzijdige involutie), en het andere, het voetpunt van de loodlijn uit het overstaande hoekpunt op de zijde neergelaten, dus midden tusschen de beide punten van elk met elkaar overeenstemmend puntenpaar gelegen is.

20. Komt met elk punt in het oneindige een bepaald punt in het oneindige overeen — en dit geval moet men wel aannemen, wijl er bij de vlakke transformatie van CREMONA voor een lijn van fundamenteaalpunten geen plaats is — dan moet ieder punt in het oneindige met zich zelf overeenkomen. Want dan vormen deze punten een involutie op die lijn, waarvan de snijpunten met de drie zijden van den driehoek alle drie dubbelpunten zijn, enz.

21. Buiten de zes punten  $A, B, C, D, w, w'$  zijn er geen fundamenteaalpunten voorhanden, wijl elk ander punt met een bepaald punt overeenkomt.

22. Met een willekeurige rechte lijn van punten  $O$  stemt als meetkundige plaats der punten  $O'$  een kromme  $K_5$  van den vijfden graad overeen, die de punten  $A, B, C, D$  tot dubbelpunten heeft. Zij gaat een nog onbekend aantal malen door  $w$  en  $w'$ , en heeft een asymptoot evenwijdig aan  $l$ .

De bij  $l$  behorende kromme is van den vijfden graad, wijl zij op elk der zijden van driehoek  $ABC$  behalve de beide hoekpunten van den driehoek, die zij tot dubbelpunten heeft, nog een punt bezit, het punt  $O'$ , overeenkomende met het punt  $O$ , waarin  $l$  de zijde snijdt.

23. De punten  $w$  en  $w'$  zijn tweevoudige fundamenteaalpunten der transformatie en dubbelpunten van elke kromme  $K_5$  (die nu is „a bicircular quintic“). Want twee krommen  $K_5$  mogen, buiten de fundamenteaalpunten om, elkaar slechts in een punt snijden, het punt  $O'$ , dat met het snijpunt  $O$  der beide lijnen overeenstemt, die met de krommen overeenkomen; wijl nu de vier gemeenschappelijke dubbelpunten  $A, B, C, D$  voor zestien snijpunten der beide krommen tellen, moeten  $w$  en  $w'$  samen acht snijpunten vertegenwoordigen, wat alleen gebeurt als  $w$  en  $w'$  dubbelpunten zijn.

24. De beschouwde overeenkomst heeft nu zes tweevoudige fundamenteaalpunten  $A, B, C, D, w, w'$ . Met elk der vier bestaanbaren komt de kegelsnee door de vijf andere punten overeen. Met elk der beide onbestaanbaren komt de kegelsnee telkens door het punt zelf en de vier bestaanbare punten overeen.

25. Gaat de lijn  $l$  door een der punten  $A, B, C, D, w, w'$ , dan scheidt van de kromme  $K_5$  zich een kegelsnee af. Zoo komt met een willekeurige lijn  $l$  door  $A$  een kromme  $K_5$  overeen, die in  $A$  een dubbelpunt heeft, door de andere punten eenmaal gaat, en een asymptoot evenwijdig aan  $l$  heeft. Gaat de lijn  $l$  door twee der punten  $A, B, C, D, w, w'$ , dan scheiden van  $K_5$  zich twee kegelsneden af. De verbindingslijnen van twee der punten komen dus met zich zelf overeen.

26. Even als op de zijden van driehoek  $ABC$  vormen de overeenkomende paren op de nu ook met zich zelf overeenstemmende loodlijnen  $AD, BD, CD$  een hyperbolisch gelijkzijdige involutie; van deze involutie is het snijpunt met de zijde, waarop de loodlijn valt, het niet in het oneindige gelegen dubbelpunt. De zes zijden van den volledige vierhoek  $ABCD$  komen dus met zich zelf overeen, en bevatten elk een hyperbolisch gelijkzijdige involutie van puntenparen, waarvoor het snijpunt met de overstaande zijde het niet in het oneindige gelegen dubbelpunt is.

27. Met een kegelsnee door vier der zes fundamenteaalpunten komt weer een kegelsnee overeen. Want terwijl met een willekeurige kromme van den tweeden graad een kromme  $K_{10}$  met zes viervoudige punten (in de bekende punten) overeenkomen moet, scheiden zich, zoodra de beschouwde kegelsnee door vier der zes fundamenteaalpunten gaat, vier fundamenteaalkegelsneden van  $K_{10}$  af. In het algemeen gaat de nieuwe kegelsnee door dezelfde fundamenteaalpunten als de oorspronkelijke; alleen als de oorspronkelijke kegelsnee door  $w$  gaat en niet door  $w'$ , dan gaat de nieuwe kromme door  $w'$  en niet door  $w$ , en omgekeerd.

28. Met elken cirkel door twee der vier punten  $A, B, C, D$  komt dus weer een cirkel door deze punten overeen. Voor de combinaties  $BC, CA, AB$  is dit uit het ontstaan der overeenkomst duidelijk; voor de combinaties  $AD, BD, CD$  is het iets nieuws; ook deze cirkels liggen symmetrisch ten opzichte van de loodlijnen (want de beide cirkels door  $C$  en  $D$ , die met elkaar overeenkomen, moeten  $AB$  in twee paren evenver van het punt  $c$  (fig. 4) gelegen punten snijden). Men vindt dus dezelfde transformatie als men den driehoek  $ABC$  door een der driehoeken  $BCD, CAD, ABD$  vervangt. Wat



nog slechts ten deele hieruit is af te leiden, dat elk der vier punten  $A B C D$  het snijpunt is van de loodlijnen uit de toppen op de overstaande zijden in de telkens door de andere punten gevormde driehoeken.

Bovendien kan men zich in plaats van de drie symmetrische cirkelgroepen op  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  ook van de drie symmetrische cirkelgroepen op  $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$  bedienen, wat ons in het volgende hoofdstuk van nut zal zijn.

Echter is de overeenkomst reeds met behulp van twee der zes symmetrische cirkelgroepen te bepalen.

29. Met elke kegelsnee door  $A, B, C, D$  (die dan noodzakelijk een gelijkzijdige hyperbool is!), komt (volgens art. 27) weer een gelijkzijdige hyperbool overeen, die door deze punten gaat. Deze vallen echter samen, wijl ze behalve de vier punten  $A, B, C, D$  twee punten in het oneindige gemeen hebben.

30. Op iedere gelijkzijdige hyperbool door de punten  $A, B, C, D$  zijn de overeenkomstige puntenparen uiteinden van middellijnen. Want het involutiecentrum der overeenkomstige punten moet met het oog op art. 20 gelegen zijn op elk der beide asymptoten van de hyperbool, en dus het middelpunt zijn.

31. De meetkundige plaats der involutiecentra (middelpunten) van de gelijkzijdige hyperbolen door de vier punten  $A, B, C, D$  is de cirkel door de punten  $a, b, c$ , (de negenpunts cirkel van driehoek  $ABC$ ). Want het met  $D$  overeenkomende punt is het snijpunt van de hyperbool met den cirkel  $ABC$ , en de negenpunts cirkel is juist de meetkundige plaats van de middens der voerstralen, uit  $D$  naar de punten van cirkel  $ABC$  getrokken; wijl  $a$  (fig. 4) het midden is van  $DD'$ , enz.

32. Bovendien komen de cirkels op de zijden van driehoek  $ABC$  als middellijn beschreven met zich zelf overeen, wijl die cirkels bij het omslaan om de zijde in zich zelve overgaan. En blijkens art. 28 moet dit nu ook gelden van de cirkels op  $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$ , als middellijn beschreven.

Voor elk der cirkels, op een der zes zijden van den volledige vierhoek  $ABCD$  als middellijn beschreven, is het midden der overstaande zijde van dien vierhoek het involutiecentrum. Want op den

---

1) Vergelijk REYE, t. a. p. Seite 183, Aufgabe 113 en SALMON, *Conic Sections*, 6th Edition, page 215, § 228, Ex. 1.

cirkel  $\alpha$  (fig. 5), beschreven op  $BC$  als middellijn, zijn  $b$  en  $c$  de dubbelpunten der involutie, en de raaklijnen in  $b$  en  $c$  aan  $\alpha$  snijden elkaar in het midden  $f$  van  $AD$ . Want de driehoek  $Cbe$ , gevormd door de koorde  $Cb$  van  $\alpha$  en de raaklijnen aan  $\alpha$  in de uiteinden dier koorde, is gelijkbeenig; dus is de daarmee gelijkvormige driehoek  $Abf$  dit ook, zoodat  $Af = bf$  is. Volgt hieruit gemakkelijk, dat de raaklijnen in  $b$  en  $c$  aan  $\alpha$ , de lijn  $AD$  in hetzelfde punt  $f$  snijden, dan is het verder duidelijk, dat de cirkel, die door  $A, b, c$  gaat, en dus  $f$  tot middelpunt heeft, tevens  $D$  bevat, en dus  $f$  het midden van  $AD$  is.

33. Met een kromme van den derden graad, die door de zes fundamenteelpunten gaat, komt weer een kromme van den derden graad overeen. Want de kromme  $K_1$ , met de zes fundamenteelpunten tot zesvoudige punten, die volgens de wetten der bilineaire transformatie met een niet door de fundamenteelpunten gaande kromme van den derden graad overeenkomt, splitst zich, zoodra deze kromme van den derden graad de fundamenteelpunten wel bevat, in de zes fundamenteelkegelsneden, die gezamenlijk vijfmaal door de fundamenteelpunten gaan, en een nieuwe kromme van den derden graad, die dit eenmaal doet.

De krommen  $L_1$ , die door het symbool  $3(ABCDww', a, OO')$  gekenmerkt zijn, komen met zich zelf overeen. Want elk dier krommen heeft met haar overeenkomstige reeds tien punten gemeen, de negen aangewezen punten, en als tiende punt het derde snijpunt met de lijn in het oneindige.

Ieder dier krommen  $L_1$  gaat ook door  $b$  en  $c$ . Want zoo ze  $AC$  behalve in  $A$  en  $C$  in een van  $b$  verschillend punt sneed, dan zou ze als met zich zelf overeenstemmende kromme, behalve  $A$  en  $C$  nog twee punten met  $AC$  gemeen moeten hebben; tenzij dit derde punt op  $AC$  in het oneindige gelegen was, in welk geval ten opzichte van  $BD$  de moeilijkheid bestaan blijft. Hieruit volgt, dat al de krommen  $L_1$ , die nu ook het symbool  $3(ABCDww', abc)$  kunnen voeren, een bundel vormen, waarvan de negen punten tusschen haakjes de basispunten zijn.

Langs overeenkomstigen weg vindt men dat de krommen  $L_1$  gekenmerkt door  $4(A^3BCDww', OO')$  met haar overeenkomstige krommen samenvallen. Want de met zulk een kromme overeenkomende kromme is van dezelfde natuur en heeft met haar reeds achttien punten gemeen, waarvan er negen in  $A$ , vijf in de andere fundamenteelpunten, twee in  $O$  en  $O'$ , en nog twee in het oneindige liggen.

Weldra zullen we krommen van den vijfden graad vinden, die met zich zelf overeenkomen.

34. Op iedere lijn liggen twee met elkaar overeenstemmende puntenparen (want de lijn snijdt haar kromme  $K_5$  buiten het oneindige in vier punten).

35. De overeenkomstige punten, wier verbindingslijn door een vast punt  $P$  gaat, vormen een kromme  $M_5$  van den vijfden graad, die door  $P$  gaat en in dit punt de verbindingslijn van  $P$  met het overeenkomstige punt  $P'$  aanraakt. Want iedere lijn door  $P$  bevat behalve  $P$  vier punten dezer kromme, de lijn  $PP'$  buiten  $P$  slechts drie.

De kromme  $M_5$  heeft de punten  $A, B, C, D$  tot dubbelpunten (want de lijn  $PA$  snijdt den cirkel  $BCD$  tweemaal); zij gaat eenmaal door de punten  $a, b, c, w$  en  $w'$  (eenmaal door  $w$  en  $w'$ , wijl de lijn in het oneindige door het niet meetellen van het punt in het oneindige in het vorige artikel van  $M_5$  — of eigenlijk  $M_6$  — afgescheiden is).

De krommen  $M_5$  komen met zich zelve overeen en hebben  $5(A^2 B^2 C^2 D^2 w w', a b c)$  tot symbool. Zij vormen een net, dat met het vlakke stelsel der punten  $P$  overeenstemt.

36. Voor elk punt van den negenpuntscirkel moet de kromme  $M_5$  de gelijkzijdige hyperbool bevatten, die dit punt tot involutiecentrum heeft, en verder dus nog bestaan uit een der krommen  $L_3$  van art. 33; voor de middens der zes zijden van den volledigen vierhoek  $ABCD$  splitst de kromme zich in een gelijkzijdige hyperbool, een cirkel en een rechte lijn.

37. De verbindingslijnen van de overeenkomstige punten van een der krommen  $L_3$ , die in art. 33 gevonden zijn, gaan door een punt dezer kromme. Dit blijkt reeds uit het vorige artikel. Want zoo als daar reeds terloops werd opgemerkt, zijn de krommen  $L_3$ , die deel uitmaken van een kromme  $M_5$ , identisch met de in art. 33 gevonden, wijl de eerste groep van krommen oneindig in aantal is (omdat met elk punt der negenpuntscirkel een dier krommen overeenstemt) en zij allen door de negen punten gaan, dus een bundel vormen gelijk aan den bundel der krommen  $L_3$  van art. 33.

Maar ook onafhankelijk hiervan kan worden aangetoond, dat de verbindingslijnen der overeenkomstige punten der in art. 33 gevondene krommen  $L_3$  voor elk dier krommen door een punt dier krommen gaan. Want deze overeenkomstige punten zijn te beschouwen als de bewegelijke punten van doorsnee van de kromme  $L_3$  met alle gelijkzijdige

hyperbolen door de punten A, B, C, D (wjl deze hyperbolen ook met zich zelf overeenkomende krommen zijn). En nu leert de voortbrenging van een kromme van den derden graad door middel van twee projectivische bundels, een van lijnen en een van kegelsneden, bij omkeering, dat de bedoelde verbindingslijnen door een punt gaan van de kromme  $L_3$ , het punt door CREMONA het tegenovergestelde punt („punto opposto”) van den vierhoek ABCD ten opzichte van de kromme  $L_3$  genoemd.

De overeenkomstige punten van een der kromme  $L_4$ , die met zich zelve overeenkomen, zijn wel te beschouwen als de bewegelijke snijpunten van deze kromme met den bundel van gelijkzijdige hyperbolen door A, B, C, D, maar hun verbindingslijnen gaan niet meer door een punt.

Stelt men de snijpunten van een willekeurige lijn  $l$  met den negenpuntscirkel  $abc$  door  $r$  en  $s$  voor, dan vindt men dat een der beide paren met elkaar overeenkomende punten van  $l$  tot de gelijkzijdige hyperbool door  $r$ , en de kromme  $L_3$  door  $s$ , het andere paar tot de kromme  $L_3$  door  $r$ , en de gelijkzijdige hyperbool door  $s$  behoort. En omgekeerd liggen de bewegelijke snijpunten eener gelijkzijdige hyperbool met een kromme  $L_3$  op de lijn, die de op den negenpuntscirkel gelegen involutiecentra van beide krommen verbindt.

38. Met behulp van de gelijkzijdige hyperbolen, van de krommen  $L_3$ ,  $L_4$ ,  $M_5$ , zou het niet moeilijk vallen met zich zelf overeenkomende krommen van hooger graad te bepalen. Wjl dit onderzoek echter niet die eenvoudigheid behoudt, waardoor het voorgaande is gekenmerkt, breek ik het hier af.

### III. *Het verband tusschen beide overeenkomsten.*

39. Door middel van de transformatie door wederkeerige voerstralen <sup>1)</sup> gaat de eene overeenkomst in de andere over.

Zijn nl. A, B, C, D (fig. 6) de bestaانبare fundamentealpunten der tweede overeenkomst, en neemt men D als het centrum der wederkeerige transformatie en  $AD.A'D = BD.B'D = CD.C'D$  als de negatieve macht dier overeenkomst aan, dan gaat A in A', B in B', C in C' over. Men vindt dan, dat de cirkel DEA overgaat in de lijn A'E' door A' evenwijdig aan De, de raaklijn in D aan den

---

<sup>1)</sup> REYE, t. a. p. Seite 170. Aufgaben 65—79.

cirkel, getrokken. En slaat men nu den cirkel  $DEA$  om  $DA$  om, dan komt met den nieuwen cirkel  $DFA$  een lijn  $A'F$  door  $A'$  evenwijdig aan  $Df$ , de raaklijn in  $D$  aan den nieuwen cirkel, overeen. Waaruit volgt, dat met het ontstaan van den cirkel om de lijn  $DA$  het ontstaan van de overeenkomstige lijn om dezelfde lijn  $DA$  overeenkomt, en hierdoor dus de overeenkomst der snijpunten  $O$  en  $O'$  der drie paren symmetrische cirkels op  $AD$ ,  $BD$  en  $CD$  als koorden in de overeenkomst der snijpunten  $O$  en  $O'$  der drie paren symmetrische lijnen ten opzichte van de deellijnen  $DA'$ ,  $DB'$ ,  $DC'$  van de hoeken van driehoek  $A'B'C'$  overgaat. Werkelijk gaan dan de cirkels  $BCD$ ,  $CAD$ ,  $ABD$  en  $ABC$ , die in de cirkeltransformatie met de punten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  overeenkomen, in de drie lijnen  $B'C'$ ,  $C'A'$ ,  $A'B'$  en den cirkel  $A'B'C'$  over, die met de punten  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  en de lijn in het oneindige overeenkomen in de lijntransformatie; werkelijk gaan de met zich zelf overeenstemmende punten  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  en de lijn in het oneindige der cirkeltransformatie in de met zich zelf overeenkomende punten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  der lijntransformatie over, enz.

40. Uit het voorgaande blijkt, dat men het in de cirkeltransformatie bij een willekeurig punt  $O$  behorende punt  $O'$  kan vinden met behulp van de lijntransformatie door de transformatie met wederkeerige voerstralen heen. Men kan bij  $O$  het overeenkomstige punt  $P$  zoeken in de transformatie door wederkeerige voerstralen, bij  $P$  weer het overeenkomstige punt  $P'$  in de lijntransformatie en bij  $P'$  het overeenkomstige punt  $O'$  in de transformatie door wederkeerige voerstralen; dit laatste punt is dan tevens het in de cirkeltransformatie bij  $O$  behorende punt.

Ook langs dezen weg vindt men, dat bij een lijn van punten  $O$  in het algemeen een kromme van den vijfden graad met zes dubbelpunten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $w$ ,  $w'$  overeenstemt, wanneer men slechts bedenkt, dat de transformatie door wederkeerige afstanden een kwadratische transformatie is met drie enkelvoudige fundamenteelpunten, hier de punten  $D$ ,  $w$ ,  $w'$ . Men vindt gemakkelijk, dat met de lijn der punten  $O$  een cirkel van punten  $P$  door  $D$  (en  $w$  en  $w'$ ) overeenstemt; dat met dezen cirkel een kromme van den vierden graad door  $D$ ,  $w$ ,  $w'$  en met dubbelpunten in  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  als meetkundige plaats der punten  $P'$  overeenkomt; en eindelijk met deze kromme in de transformatie door wederkeerige afstanden een kromme van den vijfden graad, zooals er een gevonden is. Omgekeerd kan men met behulp van de cirkeltransformatie door die der wederkeerige afstanden

heen verifieeren, dat in de lijnentransformatie met een lijn in het algemeen een kegelsnee door de punten  $A', B', C'$  overeenkomt; dit wensch ik aan den lezer over te laten.

41. Door middel van de transformatie door wederkeerige voerstralen moeten de met zich zelf overeenkomende krommen der beide beschouwde transformaties in elkaar overgaan. Zonder moeite voert deze opmerking tot nieuwe uitkomsten. Vooreerst worden de kegelsneden, die in de lijnentransformatie door de punten  $A, B, M, M'$  gingen en dus hier door de punten  $A', B', D, C'$  van fig. 6 gaan, door de hulptransformatie in krommen van den derden graad omgezet, die eenmaal door  $A, B, w, w', C'$  en tweemaal door  $D$  gaan, wat voor de cirkeltransformatie de met zich zelf overeenkomende krommen  $\beta(A'B'D^2 w w', c)$  oplevert. En ten andere gaan de met zich zelf overeenkomende gelijkzijdige hyperbolen door  $A, B, C, D$  van de cirkelovereenkomst door middel van de transformatie der wederkeerige voerstralen in krommen van den derden graad over, die eenmaal de punten  $A', B', C', w, w'$  en tweemaal het punt  $D$  bevatten, wat voor de lijnentransformatie de krommen  $\beta(ABC, M^2, w w')$  verschaft, enz.

#### IV. De vlakcentransformatie.

42. De lijnenovereenkomst laat zich onmiddellijk op de ruimte overdragen. Verbindt men namelijk (fig. 7) een punt  $O$  van den bol met de drie hoekpunten van den boldriehoek  $ABC$ , en slaat men deze bogen  $AO, BO, CO$  om de deeleirkels der hoeken om, dan gaan de nieuwe bogen weer door een punt  $O'$ . Wat geheel als voren (vergelijk art. 1) bewezen wordt. Heeft men nu een viervlak  $ABCD$  en een punt  $O$ , brengt men door de ribben van het viervlak en het punt  $O$  vlakken, en slaat men deze vlakken om de deelvlakken der tweevlakkenhoeken om, dan gaan de zes nieuwe vlakken weer door een punt  $O'$ . Want deze zes vlakken gaan volgens de beschouwing van den bol drie aan drie door vier lijnen, en deze lijnen snijden elkaar twee aan twee, zonder dat ze in een vlak liggen; zoodat de vier lijnen en dus ook de zes vlakken door een punt  $O'$  gaan.

43. Met een punt  $O$  komt een bepaald punt  $O'$  wederkeurig overeen; de overeenkomst tusschen  $O$  en  $O'$  is dus een involutorische overeenkomst van CREMONA in de ruimte.

44. Met elk der hoekpunten van het viervlak  $ABCD$  komt klaarblijkelijk het overstaande zijvlak overeen. Deze punten zijn dus enkelvoudige fundamenteelpunten met de overstaande zijvlakken als fundamenteelvlakken.

45. Met een vlak door een der ribben van het viervlak komt klaarblijkelijk in het algemeen een ander vlak door dezelfde ribbe overeen. Eveneens met een willekeurige lijn door een der hoekpunten (volgens de beschouwing van het boloppervlak) in het algemeen een andere lijn door hetzelfde hoekpunt.

Waar met een vlak door een der ribben een ander vlak door diezelfde ribbe overeenkomt, daar is dit andere vlak slechts het wezenlijke deel van het overeenkomstige oppervlak, dat als bijkomend deel dan nog de beide fundamentealvlakken van de fundamentealpunten der ribbe bevat.

Met een willekeurig vlak komt een oppervlak van den derden graad  $F_3$  overeen, dat, zoo als aanstonds blijken zal, de punten A, B, C, D tot dubbelpunten heeft, en door de zes ribben van het viervlak gaat.

Op de volgende wijze wordt aangetoond, dat het met een willekeurig vlak overeenkomende oppervlak  $F_3$  een tweevoudig punt heeft in elk der hoekpunten van het viervlak. Is  $l$  de snijlijn van het gegeven vlak met het vlak ABC, en beschouwt men nu het vlak, dat door  $l$  en D gaat, dan is het duidelijk, dat met dit nieuwe vlak een oppervlak van den tweeden graad overeenkomt. Volgens het bovenstaande moet dit oppervlak van den tweeden graad dan een kegel zijn met D tot top. Hieruit volgt nu, dat met de lijn  $l$  in ABC de oneindig dicht bij D gelegen punten overeenstemmen, die op den kegel van den tweeden graad gelegen zijn, en dit oppervlak dus voor het bij het oorspronkelijke vlak behoorende oppervlak  $F_3$  de kegel der raaklijnen in het punt D is; waarbij dus D een tweevoudig punt wordt van het oppervlak, enz. De ribben moeten dan op het oppervlak liggen, wijl zij vier punten met  $F_3$  gemeen hebben.

46. Met een willekeurige lijn  $l$  komt een ruimtekromme  $R_3$  van den derden graad overeen, die door de vier hoekpunten A, B, C, D gaat. Komt namelijk met een vlak V een oppervlak  $F_3$  overeen, dan moet met een willekeurige lijn  $l$  ook een ruimtekromme  $R_3$  overeenstemmen; want het aantal snijpunten van  $l$  met  $F_3$  is tevens het aantal snijpunten van de bij  $l$  behoorende kromme met V. Of wel, met twee vlakken V en V' door  $l$  komen twee oppervlakken  $F_3$  en  $F'_3$  overeen, die reeds de zes ribben gemeen hebben en elkaar dus nog volgens een kromme van den derden graad, de overeenkomstige kromme van  $l$ , snijden. Of eindelijk, de vlakken door O en elk der ribben AB, BC, CA gebracht, brengen drie

projectivische vlakkenbundels voort, als  $O$  zich langs een willekeurige lijn  $l$  verplaatst; dus zijn de bundels der symmetrische vlakken  $ABO'$ ,  $BCO'$  en  $CAO'$  ook projectief, waarbij dan de meetkundige plaats van het snijpunt  $O'$  der overeenkomstige vlakken dier bundels, zooals bekend is, een ruimtekromme van den derden graad is, die  $AB$ ,  $BC$  en  $CA$  tot koorden heeft, en dus door  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (en  $D$ ) gaat.

Snijdt  $l$  een der ribben van het tetraeder, dan scheidt zich de overstaande ribbe als oneigenlijk deel van de overeenkomstige kromme af, en gaat deze in een kegelsnee door de op de eerste ribbe gelegene hoekpunten over. Deze kegelsnee is de aanvullingsdoorsnee van het vlak, dat met het door  $l$  en de haar snijdende ribbe gaande vlak overeenstemt, en het oppervlak  $F_3$ , dat met een willekeurig vlak door  $l$  overeenkomt.

Snijdt  $l$  twee overstaande ribben van het tetraeder, dan is de overeenkomstige kromme een lijn die dezelfde ribben snijdt.

Het feit, dat met een willekeurig punt eener ribbe de geheele overstaande ribbe overeenkomt, is de sleutel tot de kennis der ont-aardingen van de kromme  $R_3$ . Het maakt tevens duidelijk, waarom elk oppervlak  $F_3$ , dat met een willekeurig vlak overeenstemt, de zes ribben van het viervlak bevat. Deze ribben komen met de snijpunten van het vlak met de overstaande ribben overeen.

47. De transformatie levert twaalf vlakken op, die met zich zelf overeenkomen, de deelvlakken der zes tweevlakkenhoeken; acht punten, die met zich zelf overeenkomen, de middelpunten der acht bollen die de vier vlakken aanraken; 28 lijnen, die met zich zelf overeenkomen, de verbindingslijnen dier acht punten twee aan twee. Tot dit getal 28 komt men ook, wanneer men bedenkt, dat de 66 snijlijnen der twaalf vlakken — en hieruit blijkt dan eerst, dat deze snijlijnen met zich zelf overeenkomen — behalve de zes ribben nog zestien dier lijnen driemaal bevatten, wijl de snijlijnen, die door een der hoekpunten van het viervlak gaan, — en hun aantal is vier voor elk hoekpunt — in drie der twaalf vlakken liggen. Noemt men het middelpunt van den ingeschreven bol  $M$ , die van de aangeschreven bollen  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$ ,  $M_d$ , en die van de in de tegenover elkaar gelegene daken geplaatste  $M_{ab}$  (of  $M_{ba}$ ),  $M_{ac}$  (of  $M_{ca}$ ),  $M_{ad}$  (of  $M_{da}$ ), dan zijn er vijf typen van verbindingslijnen  $MM_a$ ,  $MM_{ab}$ ,  $M_aM_b$ ;  $M_aM_{ab}$ ,  $M_{ab}M_{ac}$ ; en van deze vijf liggen de eerste en de vierde elk in drie vlakken, bijv. met de notatie van het plus- en minusteeken  $MM_a$  in de vlakken  $AB_+$ ,  $AC_+$ ,  $AD_+$  en  $M_aM_{ab}$  in de vlakken  $AB_+$ ,  $BC_-$ ,  $BD_-$ .



48. Met een oppervlak van den tweeden graad, dat door de hoekpunten van het viervlak gaat, komt weer een oppervlak van den tweeden graad door deze punten overeen. Want terwijl met een willekeurig oppervlak van den tweeden graad een oppervlak van den zesden graad met viervoudige punten in  $A, B, C, D$  (dat dus tweemaal door elke ribbe gaat) overeenstemt, scheiden zich, zoodra het gegeven oppervlak door de hoekpunten van het viervlak gaat, de vier zijvlakken van het tetraeder hiervan af, en blijft er dus een oppervlak van den tweeden graad door de punten  $A, B, C, D$  over.

Ieder oppervlak  $G_2$  van den tweeden graad, dat behalve door de punten  $A, B, C, D$  ook gaat door vier der punten  $M$ , — zoo uit de acht gekozen, dat geen twee dezer vier punten met een der hoekpunten op een rechte lijn liggen, — komt met zich zelf overeen; voor de vier punten  $M$  kan men dan of de punten  $M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}$ , of de punten  $M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$  nemen. Want ieder oppervlak van den tweeden graad door de hoekpunten en het eerste viertal snijdt bijv. het vlak  $AB_1$  volgens een kegelsnee door de vier punten  $A, B, M_{11}, M_{12}$ , en al deze kegelsneden brengen op de lijn  $MM_{11}$ , mede in dit vlak gelegen een involutie voort, die, wijl ze ook de punten  $M$  en  $M_{11}$  tot dubbelpunten heeft, met de involutie der met elkaar overeenkomende punten op die lijn identisch is; waaruit volgt, dat elk oppervlak door de hoekpunten en de punten  $M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}$  zijn snijpunten met elk der zes verbindingslijnen van de vier andere punten  $M$  met het overeenkomstige oppervlak gemeen heeft, wat met de acht oorspronkelijke punten reeds twintig gemeenschappelijke punten vormt. En wijl deze punten zes aan zes in de twaalf deelvlakken liggen (zoodat ze niet kunnen gelegen zijn op een kromme  $R_1$ , die de doorsnee is van twee oppervlakken van den tweeden graad), moet dus het beschouwde oppervlak samenvallen met het overeenkomstige. Wat nu ook geldt voor elk oppervlak van den tweeden graad door de vier hoekpunten en  $M, M_{11}, M_{12}, M_{13}$ .

49. Met den stralenbundel in de ruimte, die door al de door een der punten  $M$  gaande lijnen  $l$  gevormd wordt, komt het net van krommen  $R_2$ , waarvan  $A, B, C, D$  en  $M$  de basispunten zijn, overeen <sup>1)</sup>. De raaklijnen  $l'$ , in het punt  $M$  aan al deze krommen  $R_2$  getrokken, vormen een nieuwen stralenbundel in de ruimte  $l'$ ,

<sup>1)</sup> Belangrijke uitkomsten omtrent dit net van krommen  $R_2$  geeft STURM in verschillende verhandelingen in het Journal van CRELLE, deel 79, 80. Vergelijk ook SCHUBERT, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Seite 168.

die met den eersten stralenbundel projectief is. Want terwijl met een lijn  $l$  een bepaalde lijn  $l'$  overeenstemt, komen met de in een vlak  $V$  door  $M$  gelegen lijnen  $l$  evenzoo in een vlak, het raakvlak in  $M$  aan het overeenkomstige oppervlak  $F$ , van  $V$  aangebracht, gelegen lijnen  $l'$  overeen. Maar dan moeten de beide stralenbundels in de ruimte geheel samenvallen, daar ze vier stralen, de lijnen  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$ ,  $MD$  overeenkomstig gemeen hebben. Dus moet iedere lijn en ieder oppervlak door een der punten  $M$  in dit punt door haar overeenkomstige kromme of oppervlak worden aangeraakt.

Hiermee is tevens de uitkomst van het vorige artikel nog eens afgeleid. Ieder oppervlak  $G_2$  van den tweeden graad door  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  en  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  moet met zijn overeenkomstig oppervlak samenvallen, daar deze oppervlakken elkaar in de vier laatste punten aanraken, en de raakvlakken van den stand der acht punten onafhankelijk zijn.

50. In ieder der twaalf deelvlakken, die met zich zelf overeenkomen, is de overeenkomst der punten die algemeene, waarvan aan het slot van art. 13 sprake was. Want het vlak  $ABM$  snijdt het viervlak volgens den hoofdriehoek van de overeenkomst in dit vlak, maar het punt  $M$  is daarvan niet meer middelpunt van ingeschreven cirkel of zwaartepunt. Veeler kan men dit punt met een willekeurig punt van het vlak van den driehoek doen samenvallen door wijzigingen van het viervlak, waarbij de driehoek onveranderd blijft.

51. De lijnen, die door een willekeurig punt  $P$  gaan en twee met elkaar overeenkomende punten bevatten, vormen een kegel  $H_2$  van den derden graad door  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$  met  $P$  tot top. Want een willekeurig vlak  $V$  door  $P$  snijdt zijn overeenkomstig oppervlak  $F$ , volgens een kromme van den derden graad  $C_3$ , waarvan de punten twee aan twee met elkaar overeenkomen. De lijnen, die een willekeurig punt  $Q$  dezer kromme met de paren van overeenkomstige punten verbinden, vormen dus een involutie. En dit bewijst, dat er in het vlak  $V$  door een punt  $Q$  der kromme drie lijnen gaan, waarop overeenkomstige punten der kromme liggen, de beide dubbelstralen der involutie en de lijn, die  $Q$  met het overeenkomstige punt  $Q'$  verbindt. Waaruit dan verder in het algemeen blijkt, dat er ook door het punt  $P$  drie dier lijnen gaan, en het vlak  $V$  dus drie beschrijvende lijnen van den kegel bevat.

De graad van den kegel volgt ook uit de beschouwing van een vlak door  $P$  en een der ribben. Want dit vlak bevat ook drie lijnen

der gezochte meetkundige plaats, de verbindingslijnen van  $P$  met de fundamenteelpunten der ribbe en de lijn, die door  $P$  gaat en op deze ribbe en de tegenoverliggende rust.

Gemakkelijk ziet men, dat de kegel  $H_2$  de meetkundige plaats is van de lijnen  $l$  door  $P$ , die hun overeenkomstige kromme  $R_2$  tweemaal snijden.

Ligt  $P$  in' een der twaalf deelvlakken, dan bestaat  $H_2$  uit dit deelvlak en uit een kegel van den tweeden graad. Ligt  $P$  tegelijkertijd in twee deelvlakken, dan bestaat  $H_2$  uit drie vlakken, de beide deelvlakken en het vlak door  $P$  en de twee punten  $M$ , die niet in deze deelvlakken liggen. Ligt  $P$  tegelijkertijd in drie deelvlakken, dan bestaat  $H_2$  uit deze drie vlakken. En ligt  $P$  tegelijkertijd in nog meer deelvlakken — wat gebeurt, als  $P$  met een der hoekpunten of een der punten  $M$  samenvalt — dan is de kegel  $H_2$  onbepaald, daar ze in dit geval alle lijnen door  $P$  bevat.

52. De meetkundige plaats der paren overeenkomstige punten, die met een willekeurig gegeven punt  $P$  in een rechte lijn liggen, is een ruimtekromme  $R_7$ , die door de hoekpunten, de punten  $M$  en  $P$  gaat. Want elk vlak  $V$  door  $P$  bevat drie ribben van den kegel  $H_2$  van  $P$  en dus zeven punten der bedoelde kromme, het punt  $P$  en de drie paren op deze drie ribben. De kromme wordt in  $P$  door de lijn  $PP'$  aangeraakt. Het onderzoek naar haar ontandingen laat ik aan den lezer over.

53. Met het oppervlak  $H_2$  van  $P$  komt volgens de theorie der bilineaire overeenkomst een oppervlak  $K_2$  van den vijfden graad overeen, dat  $A, B, C, D$  en  $P'$  tot drievoudige punten heeft, en dus de ribben en de verbindingslijnen van  $P'$  met de hoekpunten bevat. Dit oppervlak, dat ook door de punten  $M$  gaat, is de meetkundige plaats der krommen  $R_2$  door  $P'$ , die door hun overeenkomstige lijnen  $l$  gesneden worden. De ontandingen er van worden gemakkelijk uit die van den kegel  $H_2$  afgeleid.

54. Voortgaande zouden we nu oppervlakken van hooger en hooger graad moeten zoeken, die met zich zelf overeenkomen. Wijl dit onderzoek ons echter te ver zou leiden, breek ik deze beschouwing af met de opmerking, dat de met zich zelf overeenstemmende krommen gevonden zijn, zoodra men de met zich zelf overeenkomende oppervlakken kent; want de eersten zijn te beschouwen als de doorsneden der laatsten. Zoo komen de doorsneden van twee oppervlakken  $G_2$  uit art. 48 met elkaar overeen, enz.

### V. De bollentransformatie.

55. De overbrenging door wederkeerige voerstralen voert ook tot uitbreiding van de cirkeltransformatie op de ruimte. Gaat men namelijk uit van een viervlak  $ABCD$  (fig. 8), waarin de loodlijnen  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  elkaar in een punt  $E$  snijden, en dus ook de producten  $AE.A'E$ ,  $BE.B'E$ ,  $CE.C'E$  en  $DE.D'E$  een zelfde waarde hebben, en neemt men  $E$  als het centrum en de negatieve waarde dier producten als de macht eener transformatie door wederkeerige voerstralen aan; dan doet men met de punten  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  de punten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , met vlakken door twee der punten  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  bollen door  $E$  en de twee overeenkomstige punten uit  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  overeenstemmen. Wilt met de zijvlakken van het viervlak  $A'B'C'D'$  bollen door  $E$  en de drie hoekpunten van het gelijknamige zijvlak van het viervlak  $ABCD$  overeenkomen, en de hoek tusschen twee vlakken gelijk is aan den hoek, waaronder de overeenkomstige boloppervlakken elkaar snijden, gaat de hoofdstelling van art. 14 hier over in de volgende, waarin, naar ik onderstel, de uitdrukkingen „tweehoek gevormd door twee bollen” en „bollen, die den tweehoek van twee andere bollen midden doordeelen” uit zich zelf duidelijk zijn:

„Wanneer men in een viervlak  $ABCD$ , waarvan de loodlijnen uit de hoekpunten op de overstaande zijvlakken elkaar in een punt  $E$  snijden, de zes bollen construeert, die door een willekeurig punt  $O$ , door  $E$  en door twee der vier hoekpunten van het viervlak gaan, en men daarna aan elk dier bollen een tweeden bol toevoegt, die zoo door  $E$  en de beide zelfde hoekpunten gaat, dat de bollen, die den tweehoek van elken bol en zijn toegevoegde midden doordeelen, tevens de bollen zijn, die den tweehoek midden doordeelen, welken de bollen door  $E$ , door de zelfde hoekpunten, en telkens een der beide overige hoekpunten met elkaar maken; dan gaan deze zes toegevoegde bollen, die reeds het punt  $E$  gemeen hebben, nog door een tweede punt  $O'$ .”

56. Wanneer het vlak gebracht door  $E$  en twee der hoekpunten een der beide bollen vertegenwoordigt, die den tweehoek midden doordeelt, welken een bol door  $E$  en deze beide hoekpunten met zijn toegevoegden bol vormt; dan liggen deze beide laatste bollen symmetrisch met betrekking tot het vlak, waarvan sprake was. Gemakkelijk bewijst men, dat de in het vorige artikel aangewezen overeenkomst, die men de overeenkomst der toegevoegde bollen zou kunnen

noemen, alleen dan een overeenkomst van symmetrische bollen heeten kan, wanneer het viervlak ABCD regelmatig is.

De lijn CD namelijk staat loodrecht op het vlak ABE. Snijdt nu het verlengde vlak ABE de ribbe OD in F, dan zijn er twee gevullen te onderscheiden; naarmate F al dan niet het midden is van OD. In het eerste geval zijn de bollen ABEC en ABED symmetrisch ten opzichte van het vlak ABE; waaruit dan volgt, dat als het viervlak ABCD regelmatig is, de overeenkomst der toegevoegde bollen een overeenkomst van symmetrische bollen wordt. In het tweede geval kunnen de bollen ABEC en ABED niet symmetrisch wèzen met betrekking tot het vlak ABE. Want de bol ABEC kan OD niet snijden in een punt, dat ten opzichte van F symmetrisch is met D; wijl het tweede snijpunt van dien bol met CD wel met O aan dezelfde zijde van F gelegen is; maar op het dubbel van den afstand FD van F verwijderd. Wat gemakkelijk blijkt als volgt. Het tweede snijpunt H van BF met den bol ABEC wordt bepaald door de betrekking

$$A'E : A'A = A'B : A'H;$$

terwijl de driehoek ABF de vergelijking

$$A'E : A'A = A'B : FA'$$

oplevert. Hieruit volgt dus

$$A'H = FA'.$$

Verder heeft men op de koorden door F, als D' het tweede snijpunt van CD met den bol ABEC is,

$$2A'F.BF = CF.D'F;$$

terwijl de driehoek BCD weer de betrekking

$$A'F.BF = CF.FD$$

oplevert. Dus heeft men eindelijk

$$D'F = 2FD.$$

Alleen in geval het viervlak ABCD regelmatig is, geeft de overeenkomst van het vorige artikel dus een overeenkomst met symmetrisch gelegen bollen.

57. De graad der transformatie door symmetrische boloppervlakken, — d. w. z. de graad van het oppervlak, dat in deze transformatie met een willekeurig vlak overeenstemt, — wordt het gemakkelijkst afgeleid uit de beschouwing van het oppervlak, dat met het vlak ABE overeenkomt. Dit oppervlak bevat de fundamenteaalooppervlakken der punten A, B, E, en als eigenlijk deel, hetgeen met de overige pun-

ten van dit vlak overeenstemt, het vlak  $ABE$  zelf. Wyl nu met  $A$  de bol  $BCDE$ , met  $B$  de bol  $CDAE$  en met  $E$ , zooals aanstonds blijken zal, een oppervlak van den zesden graad overeenstemt, is de overeenkomst der symmetrische bollen van den elfden graad.

Het fundamenteaaloppervlak van  $E$  wordt met behulp van de transformatie door wederkeerige voerstralen gevonden. In deze transformatie komt met  $E$  het vlak in het oneindige  $V_{\infty}$  overeen. Met dit vlak  $V_{\infty}$  stemt verder in de vlakkentransformatie een oppervlak van den derden graad  $F_3$  overeen. En met dit oppervlak  $F_3$ , komt eindelijk in de overeenkomst door wederkeerige voerstralen een oppervlak van den zesden graad overeen, dat zijn graad niet verlagen kan. Want het bedoelde oppervlak  $F_3$ , gaat niet door  $E$ , wyl  $V_{\infty}$  dit punt niet bevat, en evenmin door den onbestaanbaren cirkel in het oneindige, wyl het vlak in het oneindige volgens drie lijnen snijdt, de doorsneden van  $V_{\infty}$  met de drie hoofdvlakken van het regelmatige achthoekig vlak, waarvan de middens der ribben van het regelmatige vierhoekig vlak de hoekpunten zijn.

58. Het zou mogelijk kunnen schijnen, de overeenkomst door symmetrische bollen langs een meer eenvoudigen weg te bepalen, door uit te gaan van het volgende theorema, dat een uitbreiding schijnt van de stelling uit art. 14:

„Wanneer een willekeurig viervlak  $ABCD$  en een punt  $O$  gegeven is, en men de bollen  $BCDO$ ,  $CDAO$ ,  $DABO$ ,  $ABCO$  om de vlakken  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ,  $ABC$  symmetrisch omslaat, dan verkrijgt men vier nieuwe bollen die een punt  $O'$  gemeen hebben.”

Werkelijk zou deze stelling tot veel eenvoudiger beschouwingen leiden, als ze slechts waarheid bevatte. Maar ze is vals, zoo als spoedig blijken zal. Vooreerst blijkt dadelijk, dat de uitbreiding van het in art. 14 gegeven bewijs op de ruimte eigenaardige bezwaren heeft. Want in de ruimte is de bol niet meer de meetkundige plaats der punten, waaruit men een cirkel, bepaald door drie punten, onder een standvastigen ruimtehoek ziet. Wat evenwel nog niet bewijst, dat de stelling vals is.

Wanneer de stelling waarheid bevatte, zouden de punten  $O$  en  $O'$  een bilineaire overeenkomst in de ruimte vormen, waarin de bollen met de om  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ,  $ABC$  beschreven cirkels tot groote cirkels met zich zelf overeenkomen. Wat eischen zou, dat het tweede snijpunt van drie dezer bollen ook op den vierden gelegen was. In geval het viervlak  $ABCD$  regelmatig was, zou dit punt dan het middelpunt van dit viervlak moeten wezen. Maar dat is onmogelijk;

want, omdat het vierde deel der hoogte van het viervlak niet gelijk is aan het twee derde van de hoogte van den driehoek in een der zijvlakken, gaan de bedoelde bollen niet door dit punt.

59. Evenwel voert de vorige redeneering nog tot een andere overeenkomst door symmetrische bollen, waarbij een begrensde drieflakkenhoek A (fig. 9), d. w. z. een viervlak, dat aan een der vier zijden open is, een hoofdrol speelt. Construeert men eerst de bollen ACDO, ADBO, ABCO, en daarna de bollen, die symmetrisch liggen met deze ten opzichte van de vlakken ACD, ADB, ABC; dan zullen deze nieuwe bollen, die reeds door A gaan, nog een tweede punt O' gemeen hebben, dat met O een birationeele overeenkomst vormt. Deze overeenkomst van symmetrische bollen is algemeener dan de vorige. Even als de opmerking aan het slot van art. 28 deed zien, dat twee groepen van symmetrische cirkels tot de bepaling der cirkelovereenkomst voldoende zijn, blijkt hier, dat drie symmetrische groepen van bollen de verlangde bollenovereenkomst bepalen, en de weglating van het vlak BCD met de bollen door B, C en D, de bezwaren van het vorige artikel opheft.

60. Voortgaande zou ik de beide transformatien door symmetrische bollen, die boven gevonden zijn, nader moeten nagaan, en in de eerste plaats den graad der tweede, die niet noodzakelijk elf behoeft te zijn, bepalen. Maar het nauwkeurige onderzoek dier beide overeenkomsten brengt moeilijkheden met zich, geheel verschillende van die, welke tot nu toe zijn voorgekomen. Van daar, dat dit onderzoek voorloopig moet worden uitgesteld, te meer daar dit opstel reeds uitgebreider geworden is, dan ik mij had voorgesteld het te maken.

---

#### VERBETERING.

Blz. 118, in de noot, regel 2 van onderen,  
staat: ingeschreven, lees: omgeschreven.

---

## BEANTWOORDING DER PRIJSVRAAG

*„Welk is het gedeelte van het bolvormig oppervlak der zon, dat bij eene zoneclips door de maan voor het oog bedekt wordt”,*

DOOR

L. JANSE Bz.

---

Wanneer de maan in hare maandelijksche beweging om de aarde in conjunctie met de zon komt, dan gebeurt het eenige malen in het jaar, dat zij binnen den lichtkegel, die gedacht wordt de zon en de aarde te omhullen, binnentreedt en daardoor voor eenigen waarnemer op de aarde de lichtstralen der zon geheel of gedeeltelijk onderschept, zoodat de zonneschijf meer of minder door haar bedekt schijnt. Men noemt dit verschijnsel eene zon-eclips. De betrekkelijke grootte dier bedekking hangt in de eerste plaats af van de betrekkelijke schijnbare halve middellijnen dier schijven, maar ook in de tweede plaats van den schijnbaren afstand van hare middelpunten. Daar de beide eerste elementen gedurende den duur eener zon-eclips bijna onveranderd blijven, doch de afstand der middelpunten onophoudelijk verandert, zoo zal de grootte dier bedekking hoofdzakelijk van dien afstand afhankelijk zijn.

Kon de schijnbare beweging van het middelpunt der maan uit het middelpunt der aarde gezien worden, of werd die beweging waargenomen uit eenig punt van de oppervlakte der aarde, dat niet in hare omwentelende beweging deelde, dan zou de maan zeer nabij een grooten cirkel aan den hemel schijnen te beschrijven, en tevens zouden de afstanden dier middelpunten al vrij regelmatig met den tijd veranderen. De omwentelende beweging der aarde om hare as doet



evenwel de plaats der waarneming, ten opzichte van het vlak der ecliptica, gedurig eenen veranderlijken stand aannemen, waardoor aan de maan eene schijnbare zuidelijke of noordelijke beweging over de zonneschijf gegeven wordt, welke, vereenigd met hare doorgaande oostelijke beweging, aan haar middelpunt eene zeer ingewikkelde kromme over de oppervlakte der zonneschijf doet beschrijven, die op verre na niet regelmatig doorloopen wordt.

Ten einde de schijnbare afstanden der middelpunten van zon en maan voor eene bepaalde plaats der aarde te berekenen, en alzoo de grootte van de gevraagde betrekking gedurende het geheele verloop eener zon-eclips te bepalen, zoude het noodig zijn, de geheele en zeer ingewikkelde berekeningen, die tot het in alle omstandigheden nagaan eener zon-eclips gevorderd worden, uit te voeren; een arbeid, die wel niet in de bedoeling der vraag zal opgesloten liggen. Wij nemen daarom aan, dat voor eene bepaalde zon-eclips en voor eene aangewezen plaats der aarde, die berekeningen zijn uitgevoerd, zoodat voor elk gegeven oogenblik, binnen den duur eener zon-eclips, de achtereenvolgende schijnbare afstanden der middelpunten van zon en maan bekend zijn; en wij bepalen ons slechts tot het berekenen der gevraagde betrekking voor eenigen willekeurig aangenomen en schijnbaren afstand der genoemde middelpunten.

Gewoonlijk wordt onder grootte eener zon-eclips verstaan, de verhouding van het bedekte gedeelte der zons-middellijn tot hare geheele middellijn, en dan nog slechts, wanneer de verduistering op zijn grootst is, d. i. wanneer de middelpunten op hunnen dichtsten afstand van elkander zijn gekomen; in welken stand het midden der verduistering gezegd wordt plaats te hebben. Het begin en einde der verduistering vindt verder plaats, wanneer genoemde afstand gelijk geworden is, en weder wordt, aan de som der schijnbare halve middellijnen van zon en maan. Nauwkeuriger uitgedrukt, heeft de aanraking der schijven plaats, wanneer de boog van den grooten cirkel, die door de middelpunten van zon en maan gedacht wordt, gelijk is aan de som harer halve middellijnen; het raakpunt dier beide schijven ligt dan tevens op dien boog. Dit laatste is echter slechts waar voor het geval, dat de beide schijven volmaakte omtrekken van cirkels vertoonen; doch wanneer die door de ongelijke werking der straalbuiging tot ellipsen of ellipsachtige vormen zijn vervormd, moet in de bepalingen van het begin en het einde van de aanraking der randen eene wijziging worden gebracht, die later een punt van overweging in deze zal uitmaken.

Behalve de gewone benaming van de grootste eener eclips; ten opzichte van de bedekte middellijn der zon, kan men ook als grootste eener zon-eclips beschouwen, de verhouding der bedekte oppervlakte der zon tot hare geheele zichtbare oppervlakte. De schijven van zon en maan kunnen bij deze opvatting vooreerst geacht worden deelen uit te maken van het holle hemelgewelf, en het bedekte gedeelte der zon, zoowel als haar geheele oppervlakte, komen dan in de berekening voor als bolvormige oppervlakken, op genoemd hemelgewelf gelegen.

Ten anderen kan men ook, de zon als een bol beschouwende, de vraag stellen: welk gedeelte van haar bolvormig oppervlak door de maan bedekt wordt, en de oplossing hiervan is de eigenlijke bedoeling der prijsvraag. Het geldt dus hier te vinden: de verhouding van het bedekte tot het zichtbare, tot het naar den waarnemer toegekeerde bolvormig oppervlak der zon. Bij deze beschouwing moet men zich voorstellen, eene, de maan omhullende, kegelvlakte, wier top in het oog van den waarnemer geplaatst is, die het oppervlak der zon snijdt; en het bedekte gedeelte van het bolvormig oppervlak der zon zal dan ingesloten worden door die kromme lijn van doorsnijding en den schijnbaren buitenrand der zon.

Voorts kunnen wij ons voornemen, de verhouding te zoeken tusschen hetgeen door den maanskegel van het lichaam der zon uitgesneden wordt, tot den inhoud der geheele zon.

Tot eene volkomené oplossing van het vraagstuk zou nog behooren onderzocht te worden, de verhouding hiervoren bedoeld, voor het geval, dat de randen van zon en maan van den cirkelvorm afgeveken zijn.

Wij nemen ons daarom voor, om voor eene bepaalde lineaire bedekking der zonsmiddellijn, d. i. voor eene gegevene verhouding daarvan tot de geheele zonsmiddellijn, alsmede voor verschillende bedekkingen der middellijnen gedurende het geheele verloop eener zon-eclips te berekenen, in het

**EERSTE HOOFDSTUK**, de verhouding van het bedekte gedeelte tot de geheele zichtbare oppervlakte der zon, beschouwd als deelen van het holle hemelgewelf.

**TWEDE HOOFDSTUK**, de verhouding van het bedekte gedeelte tot de oppervlakte zelve der zon, voor zooveel die voor den waarnemer zichtbaar is.

**DERDE HOOFDSTUK**, de verhouding van het door den maanskegel van het lichaam der zon afgesneden gedeelte tot den inhoud der geheele zon.

VIERDE HOOFDSTUK, de nauwkeurige berekening van den afstand der middelpunten voor het geval, dat de randen van zon en maan van den cirkelvorm afgeweken zijn.

## EERSTE HOOFDSTUK.

VERHOUDING VAN HET BEDEKTE GEDEELTE TOT DE GEHEELE ZICHTBARE  
OPPERVLAKTE DER ZON, BESCHOUWD ALS DEELEN VAN HET  
HOLLE HEMELGEWELF.

Zij fig. 1, S het middelpunt der zon, M dat der maan, welke op den boogvormigen afstand SM van elkander gelegen zijn, zoodat de respectieve schijven elkander in de punten A en B snijden. Het door de maan bedekte gedeelte AO'BO'' der zonnescijf laat zich in twee segmenten AO'BOA en AO''BOA verdeelen, waarvan het eerste gelijk is aan het verschil in oppervlakte van den bolvormigen sector der zon SAO'B, en den bolvormigen driehoek SAB; en het tweede aan het verschil tusschen den bolvormigen sector MAO''B der maan en den bolvormigen driehoek MAB.

Beteekent men sector en driehoek der zon met  $S$  en  $D$ , en die der maan met  $S'$  en  $D'$ , en het bedekte gedeelte der zon door  $O$ , dan is blijkbaar

$$O = (S - D) + (S' - D') = (S + S') - (D + D'); \dots\dots (1)$$

en, de geheele zichtbare oppervlakte der zon door  $O'$  voorstellende, heeft men voor de gevraagde verhouding

$$\frac{O}{O'} = \frac{(S + S') - (D + D')}{O'} \dots\dots\dots (2)$$

Om de oppervlakten der genoemde sectoren en driehoeken in de gegevens, die uit het vraagstuk kunnen ontleend worden, uit te drukken, stellen wij de halve middellijnen der zon en der maan voor door de letters  $r$  en  $\rho$ ; den onderlingen afstand van hare middelpunten door  $a$ ; en de hoeken ASB en AMB aan die middelpunten, door  $2\phi$  en  $2\phi'$ ; dan hebben wij volgens bekende formules uit de bolvormige driehoeksmeting

$$\cos \phi = \frac{\cos \rho - \cos r \cdot \cos a}{\sin r \cdot \sin a}, \dots\dots\dots (3)$$

$$\cos' \phi = \frac{\cos r - \cos \rho \cdot \cos a}{\sin r \cdot \sin a} \dots\dots\dots (4)$$

Daar echter de geheele middellijnen van zon en maan hoogstens 1000'', en de afstand harer middelpunten, tijdens eene zon-eclips, hoogstens 2000'' kunnen bedragen, zoo kunnen wij, zonder te veel van de waarheid af te wijken, de derde machten dezer grootheden verwaarloozen, en eenvoudig schrijven

$$\cos \phi = \frac{r^2 + a^2 - \rho^2}{2r.a}, \dots \dots \dots (3')$$

$$\cos \phi' = \frac{\rho^2 + a^2 - r^2}{2\rho.a}, \dots \dots \dots (4')$$

de bekende formules voor een vlakken driehoek:

Deze formules, tot het gebruik met logarithmen geschikt gemaakt zijnde, geven

$$\cos \frac{1}{2} \phi = \pm \sqrt{\frac{s(s-\rho)}{r.a}}, \dots \dots \dots (5)$$

$$\cos \frac{1}{2} \phi' = \pm \sqrt{\frac{s(s-r)}{\rho.a}}, \dots \dots \dots (6)$$

waarin  $s = \frac{1}{2}(a+r+\rho)$ .

De vlakken der schijven van zon en maan dan als plat beschouwende, verkrijgt men voor

$$S = \frac{1}{2} r \text{ boog } A O' B = \frac{1}{2} r.r.2\phi = \frac{1}{2} r^2.2\phi,$$

$$D = \frac{1}{2} A B \times SO = r.\sin \phi.r.\cos \phi = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\phi,$$

$$\text{dus } S-D = \frac{1}{2} r^2.2\phi - \frac{1}{2} r^2.\sin 2\phi = \frac{1}{2} r^2(2\phi - \sin 2\phi).$$

Op dezelfde wijze vindt men

$$S'-D' = \frac{1}{2} \rho^2(2\phi' - \sin 2\phi'),$$

$$\text{dus } O = \frac{1}{2} r^2(2\phi - \sin 2\phi) + \frac{1}{2} \rho^2(2\phi' - \sin 2\phi') \dots \dots (7)$$

Is  $r = \rho$ , dan wordt  $\phi = \phi'$ , en

$$O = r^2(2\phi - \sin 2\phi) \dots \dots \dots (8)$$

Nu is de oppervlakte der zonneshijf

$$O' = \pi r^2,$$

derhalve heeft men voor de gevraagde verhouding

$$\begin{aligned} \frac{O}{O'} &= \frac{\frac{1}{2} r^2(2\phi - \sin 2\phi) + \frac{1}{2} \rho^2(2\phi' - \sin 2\phi')}{\pi.r^2} = \\ &= \frac{2\phi - \sin 2\phi}{2\pi} + \frac{\rho^2}{r^2} \frac{2\phi' - \sin 2\phi'}{2\pi}; \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

en voor  $r = \rho$  verandert deze in

$$\frac{O}{Q} = \frac{20 - 800}{\pi} \dots \dots \dots (9')$$

Daar, zooals wij reeds gezegd hebben, de halve middellijnen van zon en maan gedurende eene zon-eclips zeer weinig veranderen, en het verloop daarvan afhangt van de afstanden der middelpunten, zoo nemen wij voor de halve middellijnen  $r$  en  $\rho$  standvastige waarden aan, en zoeken die verhoudingen der bedekkingen voor afstanden der middelpunten, die 25'' onderling verschillen.

Wij stellen

de halve middellijn der zon  $r = 1000''$ ,

de halve middellijn der maan  $\rho = 900$ ,

en de afstanden van  $a = 1900''$  tot  $a = 0''$ ;

en voor eene tweede en voorbereidende berekening voor een volgend doel

$r = 1000''$ ,  $\rho = 1000''$ ,  $a = 2000''$  tot  $0''$ .

Als een voorbeeld der bewerking voor  $r = 1000''$  en  $\rho = 900''$ , geven wij de berekening van de gevraagde verhouding voor  $a = 1700''$ ,  $1300''$ ,  $900''$  en  $500''$ .

De berekeningen geschieden blijkbaar volgens de formules (5), (6) en (9).

| $a =$                                   | 1700°                          | 1300°               | 900°                | 500°                |
|-----------------------------------------|--------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $r = 1000$<br>$\rho = 900$              | $s = 1800$<br>$s - \rho = 900$ | $= 1600$<br>$= 700$ | $= 1400$<br>$= 500$ | $= 1200$<br>$= 300$ |
| <i>Colog r</i> =                        | 7.0000000                      | 7.0000000           | 7.0000000           | 7.0000000           |
| <i>Colog a</i> =                        | 6.7695511                      | 6.8860566           | 7.0457575           | 7.3010300           |
| <i>Log s</i> =                          | 3.2552725                      | 3.2041200           | 3.1461280           | 3.0791812           |
| <i>Log (s - ρ)</i> =                    | 2.9542425                      | 2.8450980           | 2.6989700           | 2.4771213           |
|                                         | 9.9790661                      | 9.9352746           | 9.8908555           | 9.8573325           |
| 2)                                      |                                |                     |                     |                     |
| <i>Log Cos</i> $\frac{1}{2}\phi$ =      | 9.9895330                      | 9.9676373           | 9.9454277           | 9.9286662           |
| $\frac{1}{2}\phi$ =                     | 12°31'44"0                     | 21°50'43"7          | 28°7'31"8           | 31°56'53"0          |
| $\phi$ =                                | 25°3'28"0                      | 43°41'27"4          | 56°15'3"6           | 63°53'46"0          |
|                                         | $s = 1800$<br>$s - r = 800$    | $= 1600$<br>$= 600$ | $= 1400$<br>$= 400$ | $= 1200$<br>$= 200$ |
| <i>Colog ρ</i> =                        | 7.0457575                      | 7.0457575           | 7.0457575           | 7.0457575           |
| <i>Colog a</i> =                        | 6.7695511                      | 6.8860566           | 7.0457575           | 7.3010300           |
| <i>Log s</i> =                          | 3.2552725                      | 3.2041200           | 3.1461280           | 3.0791812           |
| <i>Log (s - r)</i> =                    | 2.9030900                      | 2.7781513           | 2.6020600           | 2.3010300           |
|                                         | 9.9736711                      | 9.9140854           | 9.8397030           | 9.7269987           |
| 2)                                      |                                |                     |                     |                     |
| <i>Log Cos</i> $\frac{1}{2}\phi'$ =     | 9.9868355                      | 9.9570427           | 9.9198515           | 9.8634993           |
| $\frac{1}{2}\phi'$ =                    | 14°2'10"6                      | 25°3'57"0           | 33°44'56"3          | 43°5'19"4           |
| $\phi'$ =                               | 28°4'21"2                      | 50°7'54"0           | 67°29'52"6          | 86°10'38"8          |
| $2\phi$ =                               | 50°8'56"0                      | 87°22'54"8          | 112°30'7"2          | 127°47'32"0         |
| $2\phi$ in Boog =                       | 0.8746815                      | 1.5251017           | 1.9635303           | 2.2303950           |
| <i>Sin</i> $2\phi$ =                    | 0.7673395                      | 0.9989560           | 0.9238663           | 0.7902382           |
| $2\phi - \text{Sin } 2\phi$ =           | 0.1073420                      | 0.5261457           | 1.0396640           | 1.4401568           |
| $2\phi'$ =                              | 56°8'42"4                      | 100°15'48"0         | 134°59'45"2         | 172°21'17"6         |
| $2\phi'$ in Boog =                      | 0.9799177                      | 1.7499253           | 2.3561228           | 3.0081603           |
| <i>Sin</i> $2\phi'$ =                   | 0.8304512                      | 0.9839990           | 0.7071576           | 0.1330367           |
| $2\phi' - \text{Sin } 2\phi'$ =         | 0.1494665                      | 0.7659263           | 1.6489652           | 2.8751236           |
| <i>Log</i> =                            | 9.1745439                      | 9.8841870           | 0.2172115           | 0.4586566           |
| $2 \text{ Log } \rho$ =                 | 5.9084850                      | 5.9084850           | 5.9084850           | 5.9084850           |
| $\rho^2(2\phi' - \text{Sin } 2\phi') =$ | 5.0830289                      | 5.7926720           | 6.1256965           | 6.3671416           |
| $r^2(2\phi - \text{Sin } 2\phi) =$      | 121067.9                       | 620400.3            | 133566.2            | 2328850.0           |
|                                         | 107342.0                       | 526145.7            | 103966.4            | 1440157.0           |
| <i>Som</i> =                            | 228409.9                       | 1146546.0           | 237532.6            | 3769007.0           |
| <i>Log som</i> =                        | 5.3587150                      | 6.0593914           | 6.3757232           | 6.5762269           |
| <i>Log</i> $2\pi r^2$ =                 | 6.7981799                      | 6.7981799           | 6.7981799           | 6.7981799           |
| <i>Log verhouding</i> =                 | 8.5605351                      | 9.2612115           | 9.5775483           | 9.7780470           |
| <i>Verhouding</i> =                     | 0.03635                        | 0.182478            | 0.378045            | 0.599656            |

Op deze wijze hebben wij de waarden van  $\phi$  en  $\phi'$  voor elke  $25''$  van den afstand, en de verhoudingen der bedekte oppervlakten voor elke  $100''$  van den afstand  $a$  der middelpunten berekend, en de overige tusschen de laatste liggende waarden van  $25$  tot  $25''$  geïnterpooleerd. Al de aldus verkregene waarden van  $\phi$ , die eigenlijk de afstanden van de doorsnijdingspunten der beide schijven van het punt  $O'$  af aangeven, zijn in tabel A vereenigd, en die zelfde waarden voor  $r = 1000''$  en  $\rho = 1000''$  in tabel B; terwijl de verhouding der bedekte gedeelten tot de geheele oppervlakte voor elk der waarden van  $a$  van tabel A en B in de tabellen C en D gevonden worden.

Wat aangaat de tweede berekening, hebben wij het namelijk, — om tot een meer algemeen overzicht over de verhoudingen der oppervlakten voor beide beschouwingswijzen, in verband met de verhouding der bedekte middellijnen, te geraken —, van belang geoordeeld, de voorgaande berekeningen ook toe te passen en die door te voeren op een voorbeeld, waarin wij  $r = \rho = 1000''$  hebben genomen.

Deze laatste berekeningen, in de onderstelling van gelijke halve middellijnen van zon en maan, worden door  $r = \rho$  veel eenvoudiger, en kunnen dan geschieden volgens de formules 5, 8, 9<sup>e</sup>; zij behoeften hier niet uitgewerkt te worden. De onderscheidene standen van de bedekking der zon, volgens de uitkomsten der tabellen C en D, vinden wij terug in fig. 7, welke figuur, als tot een later hoofdstuk behoorende, op hare plaats zal worden verklaard.

---

## TWEEDE HOOFDSTUK.

### VERHOUDING VAN HET BEDEKTE GEDEELTE TOT DE GEHEELE OPPER- VLAKTE DER ZON, VOOR ZOOVEEL DIE VOOR DEN WAARNEMER ZICHTBAAR IS.

Wanneer wij in het vorige hoofdstuk den vlakken inhoud van het door de maan bedekte gedeelte der zon berekend hebben, door die oppervlakten te beschouwen als deelen uit te maken van het holle hemelgewelf, dan hebben wij ons voorgesteld twee kegelvlakken, wier beider toppunten in het oog van den waarnemer liggen, en waarvan het eene het lichaam der zon, het andere dat der maan omhult. Denkt men zich die kegelvlakken tot aan het holle hemelgewelf verlengd, dan snijden zij de laatste vlakke in twee cirkels die, elkander

wederom snijdende, het beschouwde bedekte gedeelte der zon deden ontstaan.

Immers, zij in fig. 2, A de plaats van den waarnemer, S en M de middelpunten van zon en maan, en  $FF'$  een gedeelte van het holle hemelgewelf. De omhullende kegelvlakte der zon wordt door het hemelgewelf gesneden volgens den cirkel  $K'A'O'B'K'$ , en die der maan volgens den cirkel  $O'A'L'B'O'$ , terwijl beide cirkels elkander tijdens eene zon-eclips zullen snijden, en het bedekte gedeelte der zon  $A'O'B'O'$  doen ontstaan (vergelijk fig. 1).

*Eerste manier. Overbrenging der projectie van een bolvormig vlak op een ander bolvormig vlak.*

Verlangt men den inhoud van het door de maan op de bolvormige oppervlakte der zon bedekte gedeelte te kennen, dan moet de reeds vroeger berekende inhoud op de oppervlakte der zon worden overgebracht, of de inhoud eener figuur, die op eene bolvormige oppervlakte gelegen is, op eene andere bolvormige oppervlakte geprojecteerd worden, die niet met de eerste concentrisch is.

Aangezien wij de vlakken van zon en maan als plat hebben mogen aannemen, zoo zal in die onderstelling onze vraag neêrkomen op het omgekeerde van het projecteren van eenige bolvormige vlakte op een plat vlak; d. i. het omgekeerde van wat men zich voorstelt met het maken van kaarten. Kon men voor elk elementair deeltje van de eene oppervlakte, — in de onderstelling tevens, dat zich de over te brengen oppervlakte op eene eenvoudige wijze in elementen liet verdeelen —, de verhouding van zijn inhoud tot dien op de andere bepalen; en waren de daaruit voortvloeiende differentiaalformulen met weinig moeite op eene eindige wijze te integreeren; dan zou deze handelwijze een uitstekend middel aan de hand geven om, uitgaande van den reeds gevonden inhoud van het bedekte gedeelte der zon aan het hemelgewelf, tot dien op de oppervlakte zelve der zon te geraken. Daar evenwel de verhouding der genoemde oppervlakken voor elk element veranderlijk is, en de daarvan te zoeken formules te ingewikkeld zouden worden, — vooral, daar in ons geval die overbrenging zelfs niet eens orthographisch kan geschieden —, zoo zullen wij deze wijze van oplossing niet verder ontwikkelen.

*Tweede manier. Onderzoek naar de vergelijking der doorsnijdingskromme van de kegelvlakte der maan en de oppervlakte der zon.*

Tot het oplossen der gestelde vraag kunnen wij nog den volgenden weg inslaan. Uit de vergelijkingen van de omhullende kegel-



vlakke der maan en van de boloppervlakte der zon zoeken wij de vergelijking van de doorsnijdingskromme der genoemde oppervlakken, en projecteeren die op de drie coördinatenvlakken, waardoor op elk dier vlakken eene figuur ontstaat, die besloten is tusschen een cirkelboog en de projectie der kromme van doorsnijding. Wij verdeelen verder die projectiën zoo mogelijk in elementaire deeltjes, en brengen hunnen inhoud op de oppervlakte van den bol der zon over. Gelukte het ons dan, om uit de daartoe op te stellen differentiaalformulen een eindigen integraal te verkrijgen, dan zouden wij eene gemakkelijke manier voor de berekening daarvan gevonden hebben; in het tegengestelde geval zullen de integratiën of door oneindige reeksen, of volstrekt niet kunnen verrigt worden.

Zij dan fig. 2<sup>a</sup>, A wederom de plaats van den waarnemer, M' het middelpunt der maan, S dat der zon. Daar het niets aan de algemeenheid van de oplossing zal te kort doen, en dewijl wij daardoor eenvoudiger uitdrukkingen zullen verkrijgen, plaatsen wij de as AO van den gezichtskegel der maan in de as der Y, en diens top A op eenen afstand  $\eta$  van den oorsprong O der coördinaten. Het middelpunt der zon plaatsen wij op de as der X, en nemen, om eene overeenkomstige figuur met fig. 2 te verkrijgen, de linksche as OX voor de positieve as der X aan. Wij stellen verder, in overeenstemming met de vroeger gebruikte notatiën, den hoek, onder welken de halve middellijn der zon gezien wordt  $= r$ , dien der maan  $= \rho$ , en den boogvormigen afstand van hare middelpunten  $= a$ .

Alsdan zijn

OS de coördinaat van het middelpunt der zon  $= \eta Tga$ ,

AS  $= \eta Sec a$ ,

SD, de halve middellijn der zon  $= \eta Sec a. \sin r$ .

De vergelijkingen der oppervlakte van den kegel en van de zon zijn dan blijkbaar

$$(y - \eta)^2 Tg^2 \rho = x^2 + z^2, \dots \dots \dots (10)$$

$$(x - \eta Tga)^2 + y^2 + z^2 = (\eta Sec a. \sin r)^2; \dots \dots (11)$$

en de punten der doorsnijdingskromme zullen nu aan beide vergelijkingen moeten voldoen.

De projectiën dier kromme op de drie coördinatenvlakken vinden wij door  $x$ ,  $y$  en  $z$  uit de formules (10) en (11) te elimineeren. Bij de eliminatië van  $x$  en  $y$  is het dadelijk in te zien, dat de komende projectiën op de YZ en XZ vlakken kromme lijnen van den vierden graad zijn, welke dus voor ons doel wel als onhandelbaar mogen beschouwd worden.

Daarentegen, dewijl  $z$  in beide vergelijkingen op dezelfde wijze voorkomt, levert hare eliminatie, dus de projectie op het XY-vlak, eene kromme van den tweeden graad, hetgeen ook uit de symetrische doorsnede van kegel en bol door dat coördinatenvlak te voorzien was.

Uit de vergelijkingen (10) en (11) dan  $z$  elimineerende, verkrijgt men

$$\begin{aligned}(y-n)^2 Tg^2 \rho - x^2 &= (\eta \operatorname{Sec} a \cdot \sin r)^2 - (x - \eta Tg a)^2 - y^2, \\ y^2 Tg^2 \rho - 2y \eta Tg^2 \rho + \eta^2 Tg^2 \rho - x^2 &= \eta^2 \operatorname{Sec}^2 a \cdot \sin^2 r - x^2 + \\ &\quad + 2x \eta Tg a - \eta^2 Tg^2 a - y^2, \\ y^2(1 + Tg^2 \rho) - x \cdot 2\eta Tg a - y \cdot 2\eta Tg^2 \rho + \eta^2(Tg^2 a + Tg^2 \rho - \operatorname{Sec}^2 a \cdot \sin^2 r) &= 0, \\ \text{of } y^2 - x \cdot 2\eta Tg a \cdot \cos^2 \rho - y \cdot 2\eta \sin^2 \rho + \\ &\quad + \eta^2 \cos^2 \rho \cdot (Tg^2 a + Tg^2 \rho - \operatorname{Sec}^2 a \cdot \sin^2 r) = 0 \\ \text{of wel } y^2 + Ax + By + C &= 0,\end{aligned}$$

in welke laatste  $A = -2\eta Tg a \cos^2 \rho$ ,  $B = -2\eta \sin^2 \rho$ ,

en  $C = \eta^2 \cos^2 \rho \cdot (Tg^2 a + Tg^2 \rho - \operatorname{Sec}^2 a \cdot \sin^2 r)$ ;

eene gewone parabool dus.

Om van deze parabool de ligging der as en de plaats van den top, ten opzichte van ons aangenomen coördinatenstelsel, te bepalen, stelle men

$$\begin{aligned}y &= n + y', \text{ en } x = m + x', \\ \text{en men heeft } y'^2 + 2ny' + n^2 + Am + Ax' + Bn + By' + C &= 0, \\ \text{of } y'^2 + (2n + B)y' + A' + (n^2 + Am + Bn + C) &= 0.\end{aligned}$$

Stellende nu verder  $2n + B = 0$ , dat is  $n = -\frac{1}{2}B$ ,

$$\text{of } n = -\frac{1}{2}(-2\eta \sin^2 \rho) = \eta \sin^2 \rho; \dots \dots \dots (12)$$

$$\text{en voorts } n^2 + Am + Bn + C = 0,$$

$$\text{dan komt er } \frac{B^2}{4} + Am - \frac{2B^2}{4} + C = 0,$$

$$Am - \frac{B^2}{4} + C = 0,$$

waaruit

$$m = \frac{B^2 - 4C}{4A},$$

$$\begin{aligned}\text{of } m &= \frac{4\eta^2 \sin^4 \rho - 4\eta^2 \cos^2 \rho \cdot (Tg^2 a + Tg^2 \rho - \sin^2 a \cdot \sin^2 r)}{-4 \cdot 2\eta Tg a \cdot \cos^2 \rho} = \\ &= \frac{\eta \cos^2 \rho \cdot Tg^2 \rho + \eta \cos^2 \rho \cdot (Tg^2 a - \operatorname{Sec}^2 a \cdot \sin^2 r) - \eta \sin^4 \rho}{2Tg a \cdot \cos^2 \rho} = \\ &= \frac{\eta \sin^2 \rho \cdot (1 - \sin^2 \rho) + \eta \cos^2 \rho \cdot (Tg^2 a - \operatorname{Sec}^2 a \cdot \sin^2 r)}{2Tg a \cdot \cos^2 \rho} =\end{aligned}$$

$$= \frac{\eta \sin^2 \rho + \eta (Tg^2 a - Sec^2 a \cdot \sin^2 r)}{2 Tg a},$$

of 
$$m = \frac{\eta^2 (\sin^2 \rho \cdot \cos^2 a + \sin^2 a - \sin^2 r)}{2 \eta \sin a \cdot \cos a} \dots \dots (13)$$

De as der parabool ligt derhalve evenwijdig aan de as der X, en op eenen afstand beneden die as  $= n = \eta \sin^2 \rho$ ; (form. 12) en haar toppunt op eenen afstand  $m$  (form. 13) links van de Y-as.

De nieuwe vergelijking der parabool is dus

$$y'^2 = (2 \eta Tg a \cdot \cos^2 \rho) \cdot x',$$

en 
$$2 \eta Tg a \cdot \cos^2 \rho \text{ haar parameter } \dots \dots \dots (14)$$

De as dezer parabool, zoomede haar parameter, zijn gemakkelijk te construeeren. Men trekke namelijk uit O eene loodlijn OG op de gezichtslijn AC'C der maan, en uit het snijpunt E met deze, eene lijn EF evenwijdig aan de as der X; alsdan is OF  $= n = \eta \sin \rho \cdot \sin \rho = \eta \sin^2 \rho$  (12). Voor de constructie van den halven parameter trekke men uit S eene loodlijn SG op de verlengde loodlijn OE, en uit G eene evenwijdige lijn GH aan de X-as; GH is dan  $= OG \cos \rho = OS \cos \rho \cdot \cos \rho = \eta Tg a \cdot \cos^2 \rho$  (14).

Om de plaats van den top der parabool, d. i.  $m$  te construeeren, merken wij op, dat de teller der uitdrukking voor  $m$  (form. 13) uit drie vierkanten bestaat, namelijk 1°.  $(\eta \sin \rho \cdot \cos a)^2$ , 2°.  $(\eta \sin a)^2$ , 3°.  $(\eta \sin r)^2$ , en dat het laatste van de som der beide eerste moet afgetrokken worden, terwijl de noemer  $2 \eta \sin a \cdot \cos a$  eene lijn voorstelt.

De zijden dezer vierkanten en de noemer der genoemde breuk zijn op de volgende wijze uit de figuur af te leiden en te construeeren. Trek  $OK \perp AS$ , dan is  $OK = \eta \sin a$ , en  $AK = \eta \cos a$ . Maak  $\angle KAL = \rho$ , en trek  $KL \perp AL$ , waardoor  $KL = \eta \sin \rho \cdot \cos a$  wordt. Maak voorts  $\angle OAM = r$ , en trek  $OM \perp AM$ ; OM is dan  $= \eta \sin r$ . Trekt men nu eindelijk  $KN \perp AO$ ; dan zal  $KN = \eta \sin a \cdot \cos a$  gelijk de halve noemer zijn. Met deze gevondene lijnen is het nu gemakkelijk om  $m$  te construeeren.

In fig. 2<sup>b</sup> is namelijk op de beenen van een rechten hoek;  $PQ = KL$  (fig. 2<sup>a</sup>)  $= \eta \cos a \cdot \sin \rho$ , en  $PR = OK$  (fig. 2<sup>a</sup>)  $= \eta \sin a$  genomen en de lijn QR getrokken; voorts is op QR als middellijn een halve cirkel beschreven, en  $RS = OM$  (fig. 2<sup>a</sup>)  $= \eta \sin r$  gemaakt, en QS getrokken; dan is blijkbaar deze lijn QS de zijde van een vierkant, dat den teller der breuk voorstelt. Neem eindelijk  $QT = 2 KN$  (fig. 2<sup>a</sup>)  $= 2 \eta \sin a \cdot \cos a$ , en maak in den op QT

als middellijn beschreven halven cirkel,  $QU = QS$ , en trek  $UV \perp QT$ ; dan zal  $QV$  de gevraagde  $m$  of de abscis van den top der parabool wezen (13).

Maak nu in fig. 2°  $FO' = QV$  (fig. 2°)  $= m$ , dan is  $O'$  de top der parabool, die nu met den halven parameter  $GH$  verder door punten kan beschreven worden; men zal dan ontwaren, dat zij juist door de punten  $C$  en  $C'$  gaat.

De projectie van de geheele doorsnijdingskromme op het  $XY$ -vlak is nu het gedeelte  $CO'C'$  der hiervoren geconstrueerde parabool. Daar evenwel in dit vraagstuk alleen de zichtbare oppervlakte van het door de maan bedekte gedeelte der zon gevraagd wordt, zoo moet de grens der parabool niet verder genomen worden dat tot hare zichtbaarheid. Denkt men zich eene omhullende kegelvlakte  $ADD'$  om de zon, die de laatste volgens eenen kleinen cirkel raakt, wiens projectie op het  $XY$ -vlak de rechte lijn  $DD'$  is, dan zal die blijkbaar het zichtbare van het onzichtbare gedeelte der laatste oppervlakte afscheiden. Deze lijn  $DD'$  snijdt de parabool in het punt  $Z$ , en deelt nu evenzoo de geheele geprojecteerde oppervlakte in een zichtbaar deel  $C'DZ$ , en in een onzichtbaar  $CDZ$ , met het eerste van welke deelen wij ons slechts hebben bezig te houden.

Wij moeten nu onderzoeken, of de platte vlakte  $C'DZ$  van het  $XY$ -vlak op de oppervlakte van den bol kan worden overgebracht.

Nemen wij daartoe ergens in die vlakte een element  $dx \cdot dy$ , dan wordt, zooals men weet, het overeenkomstig element van de oppervlakte van den bol uitgedrukt door

$$ds = \frac{dx \cdot dy}{\cos \gamma},$$

waarin  $\gamma$  de hoek van den normaal van het oppervlak met de  $Z$ -as beteekent.

$$\text{Nu is } \cos \gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

terwijl de vergelijking van den bol (11) geeft, als men de abscis van het middelpunt  $= p$  noemt,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-p), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

$$\text{derhalve } \cos \gamma = \frac{z}{\pm \sqrt{(x-p)^2 + y^2 + z^2}} = \pm \frac{z}{R},$$

$$\begin{aligned} \text{en} \quad s &= \int \int \frac{dx \cdot dy}{r \cdot R} = \int \int \frac{R \, dx \cdot dy}{r \cdot R} = R \int dx \int \frac{dy}{r}, \\ &= R \int dx \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R^2 - (x-p)^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Maar} \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R^2 - (x-p)^2 - y^2}} = Bg \sin \frac{y}{\sqrt{R^2 - (x-p)^2}},$$

$$\text{derhalve} \quad s = R \int dx \left[ Bg \sin \frac{y}{\sqrt{R^2 - (x-p)^2}} \right]_{y=0}^{y=f(x)}.$$

Tot het uitvoeren der volgende integratie wordt dus vereischt, dat  $y$  in eene functie van  $x$  uitgedrukt worde. Het is ons niet gelukt eene oppervlakte  $O'DZ$ , begrensd binnen een cirkelboog, eene parabool en eene rechte lijn, die niet door het middelpunt van dien cirkelboog gaat, zoodanig in differentialen te verdeelen, dat de eigenbemde tweede integratie mogelijk worde, zelfs niet, wanneer wij van polaire coördinaten gebruik maken.

Wij voer ons beschouwen het daarom, zoo niet voor onmogelijk, dan toch voor hoogst bezwaarlijk, om door de gebezigde handelwijze de gevraagde oppervlakte in eenen eindigen vorm of door eene oneindige reeks uit te drukken, en hebben, dientengevolge, ter bereiking van dit doel eenen anderen weg moeten inslaan, dien wij nu gaan uiteenzetten.

*Derde manier. A. Bepaling van den loop der doorsnijdingskromme door middel van punten.*

Wij beginnen met op te merken, dat de omhullende kegelvlakte der zon, die de zichtbaarheid van hare schijf bepaalt, op hare oppervlakte een kleinen cirkel doet ontstaan, die de eene grens der zonsbedekking door de maan uitmaakt. Deze kleine cirkel heeft tot bolvormigen straal den boog  $ST$  (fig. 2) of den hoek  $SAT$ , onder welken de halve middellijn der zon gezien wordt. De andere grens der bedekte oppervlakte is de kromme lijn van doorsnijding, op de oppervlakte der zon, die, zooals wij gezien hebben, eene spherische lijn is. Snijden wij dit bolvormig tweevlak door een vlak, dat wij als  $XY$ -vlak hebben aangenomen, alzoo in twee gelijke en gelijkvormige deelen, dan zullen ieder van deze laatste oppervlakken begrensd worden door een boog van een grooten en van een kleinen cirkel en van eene spherische lijn.

In fig. 3 stellen wederom  $S$  en  $M$  de middelpunten van zon en maan voor, die elkander tot op eenen afstand  $SM$  genaderd zijn;

$AC_0BTA$  is dan het bedekte gedeelte der zon op eene platte vlakke gevormd, die nu op de oppervlakte der zon moet overgebracht worden.

Uit de vorige berekening, tabel A, hebben wij, voor bepaalde halve middellijnen  $r$  en  $\rho$  van zon en maan, en voor eenen afstand  $a$  van hare middelpunten, den hoek  $MSB = \phi$  leeren kennen, als den hoek of den boog  $TB$ , waarin de randen der schijven elkander snijden. Dien hoek  $MSB$  of hoek  $\phi$  van tabel A verdeelen wij, in een zeker aantal  $n$ -deelen  $MSC_1, C_1SC_{11}, \dots C_{n-1}SB$ , en trekken de stralen  $SC_1, \dots SC_{11}, \dots SC_{n-1}$ , die den maansrand in even zoovele punten  $C_1, C_{11}, \dots C_{n-1}$  snijden. Trekt men verder de stralen  $MC_1, MC_{11}, \dots MC_{n-1}$ , dan ontstaan er een aantal van  $n$  driehoeken  $MSC$ , die wij als plat mogen beschouwen. In deze driehoeken zijn bekend  $MS = a$ ,  $MC = \rho$ , en de aangenomen hoek  $MSC$  (dien wij  $\phi$  zullen blijven noemen), alzoo twee zijden met een hoek over ééne der zijden. Met deze gegevens berekenen wij de zijden  $SC_1, SC_{11}, \dots SC_{n-1}$ , door de volgende formules ( $MD \perp SD$ )  $MD = a \sin \phi$ ,  $SD = a \cos \phi$ ,

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{CM^2 - MD^2} = \sqrt{\{\rho + MD\} \{\rho - MD\}}, \\ \text{en} \quad SC &= SD - CD. \end{aligned} \quad (15)$$

Als voorbeeld hebben wij genomen het bedekte gedeelte der zon, dat gevormd wordt, als  $a = 1800''$  genomen wordt, voorts  $r = 1000''$ ,  $\rho = 900''$ , van welk gedeelte later ook de inhoud zal worden berekend.

Met deze gegevens hebben wij reeds gevonden (tabel A)

$$\angle BSM \text{ of } \textit{Boog} BT = \phi = 17^\circ 40' 41'' 2.$$

Voor  $\angle C_0SM = \phi_0 = 0^\circ$  is  $SC_0 = MS - MC_0 = 1800'' - 900'' = 900''$ , en voor  $\angle C_0SB = \phi_s = 17^\circ 40' 41'' 2$  is  $SC$  of  $SB = 1000''$ .

Om de waarden van  $SC$  voor eenige tusschen  $C_0$  en  $B$  liggende punten te berekenen, hebben wij verder voor de hoeken  $\phi$  gekozen de volgende waarden

$$\begin{aligned} \phi = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ \dots 12^\circ, 12^\circ 20', 12^\circ 40', \dots 16^\circ, 16^\circ 10', 16^\circ 20', \dots 17^\circ 30'; \\ 17^\circ 32', 17^\circ 34', \dots 17^\circ 40' 40''. \end{aligned}$$

Wij laten hier de berekening volgen voor

$$\phi = 1^\circ, 6^\circ, 12^\circ, 15^\circ, 17^\circ \text{ en } 17^\circ 40'.$$

| $\phi =$                             | $1^\circ$ | $6^\circ$ | $12^\circ$ | $15^\circ$ | $17^\circ$ | $17^\circ 40'$ |
|--------------------------------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|----------------|
| <i>Log Sin <math>\phi</math></i>     | 8.2418553 | 9.0192346 | 9.3178789  | 9.4129962  | 9.4659353  | 9.4821283      |
| <i>Log S M = a</i>                   | 3.2552725 | 3.2552725 | 3.2552725  | 3.2552725  | 3.2552725  | 3.2552725      |
| <i>Log Cos <math>\phi</math></i>     | 9.9999338 | 9.9976143 | 9.9904044  | 9.9849438  | 9.9805963  | 9.9790192      |
| <i>M D = a Sin <math>\phi</math></i> | 1.4971278 | 2.2745071 | 2.5731514  | 2.6682687  | 2.7212078  | 2.7374008      |
| <i>S D = a Cos <math>\phi</math></i> | 3.2552063 | 3.2528868 | 3.2456769  | 3.2402163  | 3.2358688  | 3.2342917      |
| <i>B M + M D</i>                     | 931.4143  | 1088.1513 | 1274.2410  | 1365.8743  | 1426.2690  | 1446.2618      |
| <i>B M - M D</i>                     | 868.5857  | 711.8487  | 525.7590   | 434.1257   | 373.7310   | 353.7382       |
| <i>Log verschil</i>                  | 2.9388127 | 2.8523878 | 2.7207868  | 2.6376155  | 2.5725592  | 2.5486819      |
| <i>Log som</i>                       | 2.9691429 | 3.0366893 | 3.1052514  | 3.1354107  | 3.1542016  | 3.1602470      |
| 2)                                   | 5.9079556 | 5.8890771 | 5.8260382  | 5.7730262  | 5.7267608  | 5.7089289      |
| <i>Log C D</i>                       | 2.9539778 | 2.9445385 | 2.9130191  | 2.8865131  | 2.8633804  | 2.8544644      |
| <i>C D</i>                           | 899.4519  | 880.1128  | 818.5008   | 770.0395   | 730.0968   | 715.2610       |
| <i>S D = a Cos <math>\phi</math></i> | 1799.7260 | 1790.1400 | 1760.6660  | 1738.6660  | 1721.3490  | 1715.1090      |
| <i>S C</i>                           | 900.2741  | 910.0272  | 942.1652   | 968.6265   | 991.2522   | 999.8480       |

De berekende waarden van SC voor alle de opgenoemde waarden van  $\phi$  zijn opgenomen in tabel F.

Tot hiertoe hebben al onze berekeningen betrekking gehad op een plat, of op een gebogen vlak, dat deel uitmaakte van het holle hemelgewelf. Alsnu moeten de punten  $C_1, C_{11}, \dots, C_{n-1}$ , waarin wij den maansrand of den hoek  $\phi$  verdeeld hebben, op het bolvormige oppervlak van de zon worden geprojecteerd.

Die punten zullen op laatstgenoemde oppervlakte volkomen bepaald zijn, wanneer wij door dezelve een grooten cirkel hebben getrokken, en aan den boog daarvan zijne behoorlijke lengte hebben gegeven.

Beschouwen wij daartoe de vlakke der zons- en maansschijven van fig. 3, als raakvlak in het punt S aan den bol der zon, en de stralen SM, SC<sub>1</sub>, SC<sub>11</sub>, ... SB als zoovele projectiën van loodrechte vlakken, dan zullen deze loodrechte vlakken blijkbaar de oppervlakte der zon volgens groote cirkels SC<sub>1</sub>, SC<sub>11</sub>, ... snijden, die allen door het raakpunt S gaan, en wier standhoeken gelijk zullen zijn aan de bolvormige hoeken C<sub>0</sub>SC<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>SC<sub>11</sub>, ... op den bol, en ook gelijk aan de vlakke hoeken  $\phi$  der stralen SM, SC<sub>1</sub>, ... SB. De lengten der stralen SC, SC<sub>1</sub>, ... SB daarentegen zullen, wanneer zij op de oppervlakte van den bol overgebracht zijn, eene vergrooting on-

dergaan, en wel des te meer eene toenemende, hoe verder de punten C van het middelpunt S af komen te liggen, en het is nu de vraag, om deze lengten te bepalen; dat wil zeggen, de grootte van den boog SC op den bol te vinden, die met een gegeven straal SC op het platte vlak overeenkomt.

In fig. 2 stelt wederom A de plaats van den waarnemer, S en M de middelpunten van zon en maan voor. Trekken wij uit A langs den maansrand een gezichtsstraal AB, die den zonsrand in het punt B ontmoet, dan zal men voor den hoek  $SAB = \alpha$ , die hier de lengte der zijde SC van fig. 3 op het platte vlak vertegenwoordigt, den overeenkomstigen boog CB of den hoek  $CSB = \beta$  aan het middelpunt der zon te bepalen hebben.

Daartoe heeft men in den vlakken driehoek ASB

$$\sin SBA : \sin SAB = AS : BS,$$

$$\sin(\alpha + \beta) : \sin \alpha = R : R \sin r,$$

of . 
$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha}{\sin r} \dots \dots \dots (16)$$

Ofschoon deze formule niet rechtstreeks de waarde van  $\beta$  doet kennen, leent zij zich evenwel uitstekend voor de berekening van hoek  $\beta$ , en veel beter dan de hieruit afgeleide formule

$$\cos \beta = \frac{\sin^2 \alpha + \cos \alpha \sqrt{(\sin^2 r - \sin^2 \alpha)}}{\sin r}, \dots \dots (17)$$

of benaderd 
$$r \cos \beta = \alpha^2 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \sqrt{r^2 - \alpha^2} \dots \dots (17')$$

De waarden van  $\beta$  zijn in tabel E vereenigd. Zij zijn alle berekend volgens formule (16) voor de in deze tabel aangenomene waarden van  $\alpha$ . Om uit deze uitkomsten te berekenen of te interpoleeren de waarden van  $\beta$  voor alle andere waarden van  $\alpha$  van seconde tot seconde, hetgeen voor het vervolg noodig is, hebben wij daartoe, en ook om de nauwkeurigheid der berekening zelve te toetsen, voor de bepaling van de waarde van  $\alpha$  eene oordeelkundige keuze moeten doen. Daar wij namelijk uit de figuur ontwaren, dat de waarden van  $\beta$  in het eerst weinig, later meer en meer, en eindelijk buitengewoon snel toenemen, zoo moeten de waarden van  $\alpha$  dichter en dichter bij elkander genomen worden, hoe nader  $\alpha$  bij hare grens 1000" komt; terwijl men tegelijkertijd zorg moet dragen, dat de interpolatiën de vierde orde niet te boven gaan, en om altijd op de helft of op een derde te interpoleeren. Dienovereenkomstig hebben wij



voor  $\alpha$  achtereenvolgens genomen, van vier tot vier seconden, van  $\alpha = 0$  tot  $\alpha = 950''$ ; van twee tot twee seconden, van  $\alpha = 950''$  tot  $\alpha = 980''$ , van  $0''8$  tot  $0''8$  seconden, van  $\alpha = 980''$  tot  $\alpha = 990''$ , en van  $0''4$  tot  $0''4$ , van  $\alpha = 990''$  tot  $\alpha = 1000''$ .

Enkele voorbeelden dezer berekening laten wij volgen voor  $\alpha = 120''$ ,  $= 600''$ ,  $= 900''$ ,  $= 990''$  en  $= 998''$ .

| $\alpha =$                            | 120''       | 600''       | 900''       | 990''       | 998''       |
|---------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\text{Log Sin } \alpha =$            | 6.7647560.7 | 7.4637255.2 | 7.6398160.2 | 7.6812083.7 | 7.6847037.0 |
| $\text{Log Sin } r =$                 | 7.6855731.7 | 7.6855731.7 | 7.6855731.7 | 7.6855731.7 | 7.6855731.7 |
| $\text{Log Sin } (\alpha + \beta) =$  | 9.0791820.0 | 9.7781523.5 | 9.9542428.5 | 9.9956352.0 | 9.9991305.3 |
| $\alpha + \beta =$                    | 6°53'31''   | 36°52'12''  | 64°9'29''   | 81°53'23''  | 86°22'32''  |
| $(\alpha + \beta) - \alpha = \beta =$ | 6°51'31''   | 36°42'1''   | 63°54'29''  | 81°36'55''  | 86°5'54''   |

Uit deze waarden van  $\beta$ , die van  $\alpha = 0$  tot  $\alpha = 950''$ , van  $4''$  tot  $4''$  der waarden van  $\alpha$  berekend zijn, kan men nu, met behulp der eerste en tweede verschillen eerst op de helft, en daarna weder op de helft interpoleren, en aldus deze tafel uitbreiden voor waarden van  $\alpha$  van seconde tot seconde en tot onderdeelen van seconden.

Met behulp van de tabel E valt het ons nu gemakkelijk om de waarden van SC, die wij voor de verschillende waarden van  $\phi$  gevonden hebben, en die in tabel F vereenigd zijn, in waarden van  $\beta$  over te brengen. Voor genoemde waarden van  $\beta$  met hare verschillen zijn de laatste kolommen van tabel F bestemd geworden.

#### B. Onderzoek of de oppervlakte van het afgesneden gedeelte der zon door integratie te verkrijgen is.

Nu wij de verschillende punten C van fig. 3 op de oppervlakte van den bol hebben overgebracht, zullen wij, eer wij verder gaan, eerst onderzoeken, of wij niet eene bruikbare integratie-formule kunnen verkrijgen, door welke de begeerde inhoud onmiddellijk kan worden berekend.

Zij daartoe, in fig. 4, de gestippelde binnencirkel TBQAT de kleine cirkel van den bol, die ons als uiterste grens van de zon toeschijnt, en de buitenste PP' haar buitenrand, zooals zij op eenen oneindigen afstand zou gezien worden; en laat de boog BC<sub>0</sub>A wederom de doorsnede van den maanskegel met de oppervlakte der zon voorstellen. Brengen wij door S en B een boog van een grooten cirkel, dan zal de oppervlakte TC<sub>0</sub>B, die wij berekenen moeten, gelijk zijn

$$TC_0B = TSB - C_0SB,$$

en, daar de oppervlakte van het bolvormig segment TSB dadelijk uit de gegevens kan berekend worden, zal alles nederkomen op het berekenen van de oppervlakte  $C_0SB$ .

Te dien einde verdeelen wij  $C_0SB$  in polaire differentiaal  $C_\varphi.S.C_{\varphi+d\varphi}$ , onder een oneindig kleinen hoek  $d\varphi$ , en wier booglengten  $= C_\varphi S = \beta$  zijn. Elke differentiaal, beschouwd als een gedeelte van een bolvormig segment, heeft tot inhoud

$$d.O = 2\pi R \times R \sin \varphi \beta \times \frac{d\varphi}{2\pi},$$

of wanneer de straal van den bol  $= 1$  gesteld wordt,

$$O = \int \sin \varphi \beta d\varphi = \int (1 - \cos \beta) d\varphi.$$

Om nu  $\beta$  in  $\varphi$  uit te drukken merken wij op, dat volgens formule (17'), blz. 157,

$$r \cos \beta = x^2 + \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \sqrt{r^2 - x^2}, \dots \dots (17')$$

en volgens formule (15), blz. 155, en fig. 3

$$SC = Tga = a \cos \varphi - \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \varphi},$$

$$\text{of} \quad x = a \cos \varphi - \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \varphi} \dots \dots (15')$$

Uit formule (15') volgt

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 \cos^2 \varphi - 2a \cos \varphi \cdot \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \varphi} + r^2 - a^2 \sin^2 \varphi = \\ &= r^2 + a^2 \cos 2\varphi - 2a \cos \varphi \cdot \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Deze waarde van  $x^2$  overgebracht in de uitdrukking (17') voor  $r \cos \beta$ , geeft

$$\begin{aligned} r \cos \beta &= r^2 + a^2 \cos 2\varphi - 2a \cos \varphi \cdot \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \varphi} \dots (\text{stel} = M) \\ &+ \left\{1 - \frac{1}{2} \{r^2 + a^2 \cos 2\varphi - 2a \cos \varphi \cdot \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \varphi}\}\right\} \times \\ &\times \sqrt{r^2 - r^2 - a^2 \cos 2\varphi + 2a \cos \varphi \cdot \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \varphi}}; (\text{stel} = N) \end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned} O &= \int (1 - \cos \beta) d\varphi = \\ &= \varphi - \frac{1}{r} \int (M + N) d\varphi \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

Het eerste gedeelte  $M$  dezer formule laat zich gemakkelijk in de volgende differentiaal-formulen scheiden.

$$\begin{aligned} \int M d\varphi &= r^2 \int d\varphi, \\ &+ a^2 \int \cos 2\varphi d\varphi, \\ &- 2a \int \cos \varphi \cdot \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Het tweede gedeelte  $N$  is gelijk de beide volgende

$$\begin{aligned} \int N d\phi &= \int \sqrt{r^2 - \rho^2 - a^2 \cos 2\phi + 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}} d\phi - \\ &- \int \frac{1}{2} \{ \rho^2 + a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi} \} \times \\ &\times \sqrt{r^2 - \rho^2 - a^2 \cos 2\phi + 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}} d\phi. \end{aligned}$$

Stellen wij, in plaats van den wortelvorm

$$\sqrt{1-p} = 1 - \frac{p}{2} - \frac{p^2}{8} - \frac{p^3}{16} - \dots, \dots (19'')$$

dan komt er

$$\begin{aligned} (N_1) + \sqrt{r^2 - \rho^2} \int &\left\{ 1 - \frac{a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}}{2(r^2 - \rho^2)} - \right. \\ &- \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^2}{8(r^2 - \rho^2)^2} - \\ &- \left. \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^3}{16(r^2 - \rho^2)^3} \right\} d\phi - \\ &- \int \frac{1}{2} (\rho^2 + a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}) \times \\ &\times \sqrt{r^2 - \rho^2} \left\{ 1 - \frac{a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}}{2(r^2 - \rho^2)} - \right. \\ &- \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^2}{8(r^2 - \rho^2)^2} - \\ &- \left. \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^3}{16(r^2 - \rho^2)^3} \right\} d\phi. \end{aligned}$$

Het oplossen dezer integraalformule zou neerkomen op het berekenen van 33 nog al vrij samengestelde termen, onder verwaarloozing van de vierde en hoogere machten der reeks, waarin  $\sqrt{1-p}$  (19') ontwikkeld is.

Heeft men de waarde van  $r \int \cos \beta d\phi$  gevonden, dan moet die nog door  $r$  gedeeld en dat quotient van  $\phi$  worden afgetrokken, om den inhoud te verkrijgen van het driehoekig stuk  $SC_0 B$  (fig. 4).

Wij willen nu gaan onderzoeken, of deze integraalformule toegepast kan worden, 1° in het algemeen, of 2° in het bijzonder voor ons geval.

Voor eene algemeene toepasselijkheid moeten in de eerste plaats de coëfficiënten der onderscheidene termen kleiner en kleiner worden, hoe meer termen men van  $\sqrt{1-p}$  (19'') neemt. Wij zien dade-

lijk, dat bijna al de termen zijn aangedaan door een coëfficiënt van den vorm  $\frac{a'' \rho'}{(r^2 - \rho^2)^i}$ : en het zal dus hoofdzakelijk van de waarde van  $(r^2 - \rho^2)$  afhangen, of de reeks al dan niet convergeert. En al dadelijk zien wij in, dat daar  $r$  en  $\rho$  bijna aan elkander gelijk kunnen zijn,  $(r^2 - \rho^2)^i$  eene zeer kleine grootheid worden kan, en dus de breuk  $\frac{a'' \rho'}{(r^2 - \rho^2)^i}$  in diezelfde en boven mate zal vergroot worden.

Stellen wij b. v.  $r = 1000''$  en  $\rho = 999''$  of  $r = 0.0048481368$   $\rho = 0.0048482886$  voor den straal  $= 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{dan is} \quad (r^2 - \rho^2)^1 &= 0.0000.0004.6992, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} &= 0.0002.1677.0850, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{3}} &= 0.010.1019, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{4}} &= 0.018.4787, \\ &\text{enz.} \end{aligned}$$

Daar nu de tellers der breuken,  $a$  en  $\rho$  standvastig blijvende, bij elke benadering hoogstens een tweede macht hooger klimmen, zoo zal deze integraalformule in het algemeen des te minder convergeren en zelfs divergeren, naarmate meer benaderingen aangewend worden.

Of nu de integraalformule ook in ons geval, namelijk voor  $r = 1000''$ ,  $\rho = 900''$  en  $a = 1800''$ , nog bruikbaar is, willen wij alleen wijzen op het toenemen van coëfficiënten der termen, die van de termen  $\frac{p^2}{8}$  en  $\frac{p^3}{16}$  en van de hoogere machten van  $\sqrt{1-p}$  afhangen, die wij niet noodig gevonden hebben verder te ontwikkelen.

Er doet zich tot eene algemeene toepassing dezer integraalformule, of beter gezegd tot het vinden van den inhoud van driehoek  $SO_0B$ , bovendien nog eene andere zwarigheid op. In fig. 3 is namelijk de stand der schijven van zon en maan zóó voorgesteld, dat de boog  $C_0B$  door alle bogen  $SC$  slechts in één punt gesneden wordt; in die gevallen, maar ook in die alleen, mag men stellen

$$TC_0B = TSB - C_0SB \dots\dots\dots (18)$$

Dit heeft echter niet altijd plaats, want, wanneer de middelpunten van zon en maan zich meer en meer naderen tot dat de maansrand bijna op het middelpunt der zon valt, dan komen daaronder standen voor, waarin enkele bogen  $C_0C$  den boog  $C_0B$  in twee

punten zullen aaziden; en dan zou het hoogst moeilijk zijn, den inhoud van  $SC_0B$ , op wat manier ook, te bepalen.

Om alle welke redenen wij het vinden van den inhoud  $SC_0B$  door middel eener integraalformule hebben moeten opgeven.

*C. Voorbereidende berekening tot het vinden van den inhoud der bedekte oppervlakte.*

Nu geene der aangewende methoden van integratie ons hebben geleid tot het vinden van den bewusten inhoud, bleef ons niets anders over dan de bepaling van dien inhoud door verdeeling der oppervlakte in driehoekjes. Tevens moesten wij eene methode aanwenden die voor alle gevallen, die in het vraagstuk kunnen voorkomen, aanwendbaar was.

Deze methode bestond daarin, dat wij eene oppervlakte berekenen, die niet zooals de driehoek  $C_0SC$  somtijds onmogelijk te berekenen was, maar een driehoek, die bij alle afstanden der middelpunten berekend konde worden; en deze is de driehoek  $TC_0B$ , dezelfde driehoek, wiens inhoud wij kennen moeten.

Tot dat einde hebben wij den boog  $ST$  (fig. 4) tot  $90^\circ$  in  $P$  verlengd, en door  $P$  en  $B$  een boog  $PB$  van een grooten cirkel gebragt. Alsdan is inhoud

$$TC_0B = PC_0B - PTB = PC_0B - (PSB - TSB) \dots (19)$$

Dewijl nu de hoek  $C_0PB$  blijkbaar eene functie van twee der elementen  $\phi$  en  $\beta$  van den driehoek  $SC_0B$  moet zijn, en wij de laatste oppervlakte te bezwarend gevonden hebben om te integreeren, zoo kan er des te minder sprake zijn van eene integratie der oppervlakte  $PC_0B$ , en schiet er dus ten laatste niets anders over dan deze in een aantal driehoekjes te verdeelen, en van ieder dezer driehoekjes den inhoud te zoeken. Daartoe brengen wij door alle punten  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  en de pool  $P$ , bogen van groote cirkels, die daardoor de oppervlakte  $PC_0B$  in even zoo vele driehoekjes verdeelen, wier twee zijden bogen van groote cirkels, en de derde zijden deelen uitmaken van de kromme  $C_0B$ , van doorsnijding.

Om de elementen van deze driehoeken, waardoor hunne inhouden bepaald kunnen worden, te vinden, moeten wij eerst bekend hebben de hoeken  $P$  en de zijden  $PC$  van elken driehoek  $C_1PC_2$ , enz.; deze grootheden worden op de volgende wijze gevonden.

In elk der driehoeken  $SPC$  zijn gegeven  $SP = 90^\circ$ ,  $SC = \beta$  uit tabel  $F$ , en de ingesloten hoek  $PSC = \phi$ ; de waarde van  $\beta$  is

daarbij eene functie van  $SC$  in  $\phi$  (tabel F). Door deze gegevens worden de onbekende grootheden  $P$  en  $PC$  door een der beide volgende stellen formules berekend.

Laat men uit eenig punt  $C$ , fig. 4, een loodrechten boog  $CD$  op de basis  $SP$  neêr, die deze in het punt  $D$  in twee stukken  $SD = \gamma$  en  $PD = 90^\circ - \gamma$  snijdt, dan heeft men

$$Tg SD = Tg SC . Cos S,$$

$$Sin SD : Sin PD = Cot S : Cot P,$$

en

$$Cos SD : Cos PD = Cos SC : Cos PC,$$

of wel

$$Tg \gamma = Tg \beta . Cos \phi,$$

$$\left. \begin{aligned} Sin \gamma : Sin (90^\circ - \gamma) &= Cot \phi : Cot P \quad \text{of} \quad Cot P = Cot \gamma . Cot \phi, \\ Cos \gamma : Cos (90^\circ - \gamma) &= Cos \beta : Cos PC \quad \text{of} \quad Cos PC = Tg \gamma . Cos \beta. \end{aligned} \right\} (20)$$

Brengt men de waarde van  $Tg \gamma = Tg \beta . Cos \phi$  in de beide laatste over, dan komt er

$$Cot P = \frac{Cot \beta}{Sin \phi} \quad \text{en} \quad Cos PC = Sin \beta . Cos \phi; \dots (20^a)$$

of wel, met behulp der Neperiaansche analogiën,

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2} (C + P) &= \frac{Cos \frac{1}{2} (SP - SC)}{Cos \frac{1}{2} (SP + SC)} . Cot \frac{1}{2} S, \\ Tg \frac{1}{2} (C - P) &= \frac{Sin \frac{1}{2} (SP - SC)}{Sin \frac{1}{2} (SP + SC)} . Cot \frac{1}{2} S, \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

$$\text{en } Tg \frac{1}{2} PC = Tg \frac{1}{2} (SP + SC) \frac{Cos \frac{1}{2} (C + P)}{Cos \frac{1}{2} (C - P)} = Tg \frac{1}{2} (SP - SC) \frac{Sin \frac{1}{2} (C + P)}{Sin \frac{1}{2} (C - P)},$$

of in plaats van deze laatste

$$Sin PC = \frac{Sin \phi}{Sin P} Sin SC.$$

Deze laatste formules ondergaan, door  $SP = 90^\circ$  daarin over te brengen, de volgende vereenvoudigingen

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2} (C + P) &= Tg \frac{1}{2} (90^\circ + \beta) . Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2} (P - C) &= Cotg \frac{1}{2} (90^\circ + \beta) . Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2} PC &= Cot \frac{1}{2} (90^\circ + \beta) \frac{Cos \frac{1}{2} (C + P)}{Cos \frac{1}{2} (C - P)}. \end{aligned} \right\} \dots (21^a)$$

De berekeningen volgens het eerste stel formuli (20<sup>a</sup>) loopen spoediger af; zij volgen hier voor eenige waarden van  $\phi$ .

| $\phi =$               | 1°        | 6°         | 12°        | 15°        | 17°        | 17°4'     |
|------------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|-----------|
| $\beta =$              | 63°56'42" | 65°15'25"  | 70°9'24"   | 75°20'27"  | 82°8'26"   | 88°43'    |
| <i>Log Cot</i> $\beta$ | 9.6892390 | 9.6635684  | 9.5573588  | 9.4176104  | 9.1400052  | 8.34915   |
| <i>Log Sin</i> $\phi$  | 8.2418553 | 9.0192346  | 9.3178789  | 9.4129962  | 9.4659353  | 9.48212   |
| <i>Log Cot</i> P       | 1.4473837 | 0.6443338  | 0.2394799  | 0.0046142  | 9.6740699  | 8.86703   |
| P =                    | 2°2'39"9  | 12°46'49"0 | 29°56'51"0 | 44°41'44"3 | 64°43'34"3 | 85°47'20" |
| <i>Log Sin</i> $\beta$ | 9.9554565 | 9.9581786  | 9.9734162  | 9.9856278  | 9.9959011  | 9.99989   |
| <i>Log Cos</i> $\phi$  | 9.9999338 | 9.9976143  | 9.9904044  | 9.9849438  | 9.9805963  | 9.9790193 |
| <i>Cos</i> PC          | 9.9533903 | 9.9557929  | 9.9638206  | 9.9705716  | 9.9764974  | 9.9789196 |
| PC =                   | 26°4'22"4 | 25°24'56"1 | 23°3'49"4  | 20°51'18"8 | 18°40'48"3 | 17°42'47" |

De overige waarden van P en PC worden in tabel G gevonden.

De gevondene waarden voor den hoek P en de zijde PC, van iederen bolvormigen driehoek  $PC_{n-1}P_n$  kunnen, dewijl in ieder van deze twee zijden  $PC_{n-1}$  en  $PC_n$  en de ingesloten hoek  $P_n - P_{n-1}$ , bekend zijn, gebruikt worden om den inhoud van ieder dezer driehoeken, door middel van hunne spherische excessen, te berekenen.

Het is namelijk uit de bolvormige driehoeksmeting bekend, dat de inhoud van iederen bolvormigen driehoek tot dien van het spherisch octant dezelfde verhouding heeft als zijn spherisch exces tot een rechten hoek. Stelt  $I$  den inhoud van een bolvormigen driehoek,  $\Delta$  dien van het spherisch octant, en  $\varepsilon$  het spherisch exces voor, dan is

$$I : \Delta = \varepsilon : 90^\circ, \text{ of } I = \frac{90}{\varepsilon} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

of, wel, wanneer  $A, B, C$  de hoeken van den driehoek beteekenen

$$I = \frac{(A + B + C) - 180^\circ}{90^\circ} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

Het spherisch exces  $\varepsilon$ , dat onmiddellijk van de grootte der hoeken eens bolvormigen driehoeks afhangt, zal dus gevonden worden, wanneer men  $180^\circ$  van de som der hoeken aftrekt. Zijn de gegevens van een driehoek andere dan de drie hoeken, in ons geval twee zijden en de ingesloten hoek, dan vindt men  $\varepsilon$  door de formule

$$\cot \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cdot \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C},$$

$$\text{welke, door te stellen } \frac{\cot \frac{1}{2} a \cdot \cot \frac{1}{2} b}{\cos C} = Tg^2 \mu,$$

tot dezen, beter voor de berekening geschikt, vorm wordt omgezet

$$Tg \frac{1}{2} s = Tg C \cos^2 \mu \dots \dots \dots (24)$$

Hoewel deze formule eenvoudig genoeg voor de bewerking is, geven wij toch aan de eerste de voorkeur, namelijk, aan het berekenen der beide overige hoeken van den driehoek. Daartoe hebben wij niets anders noodig dan de som der beide overige hoeken, en kunnen wij volstaan met de berekening van de eerste formule der Neperiaansche analogiën

$$Tg \frac{1}{2} (C_{n-1} + C_n) = \frac{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} - PC_n)}{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} + PC_n)} \cot \frac{1}{2} (P_n - P_{n-1}) \dots (25)$$

Wanneer wij de waarden van SC uit tabel F, voor waarden van  $\phi$  van 10 tot 10' wilden interpoleeren, en voor deze in tabel E de overeenkomstige waarden van  $\beta$  zoeken, en verder, voor al die waarden van  $\phi$ , P en PC uit tabel G interpoleren, dan zouden wij de geheele bedekte oppervlakte der zon in 112 bolvormige driehoeken verdeelen.

Het komt ons echter voor, dat de nauwkeurigheid ver genoeg voortgezet zal zijn, zoo wij ons voor de berekening van den inhoud bepalen tot de waarden van  $\phi$ , in tabel F aangenomen, in welk geval er nog 39 bolvormige driehoeken te berekenen zijn; welker inhouden dan wellicht met minder moeite tot elken gewenschten graad van nauwkeurigheid kunnen geïnterpoleerd worden.

Deze laatste verdeling in 39 driehoeken behoudende, zoeken wij eerst de elementen derzelfde uit tabel G, welke wij in tabel H mededeelen, om dan daarmede met behulp der formule (25), de halve som der onbekende hoeken te berekenen. Tabel H bevat nog in hare laatste kolommen de sinus-versussen zoowel der enkele zijden als die van hunne gemiddelde waarden, welke wij later noodig zullen hebben.

Ziehier de berekening van het spherisch exces  $s$ .

| Driehoek N°.                            | 1            | 7              | 13             | 22             | 31             | 39             |
|-----------------------------------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $(PC_0 - PC_1) =$                       | 0° 0' 33" 4  | 0° 7' 41" 4    | 0° 6' 1" 8     | 0° 9' 22" 6    | 0° 6' 38" 2    | 0° 0' 59" 7    |
| $(PC_0 + PC_1) =$                       | 26 4 55 7    | 25 17 15 8     | 22 57 47 7     | 20 41 56 5     | 18 34 10 2     | 17 41 44 7     |
| $\frac{1}{2} (P_1 - P_0) =$             | 1 1 20 0     | 1 11 14 3      | 0 38 37 2      | 1 10 0 2       | 1 30 20 1      | 1 38 53 5      |
| $\log \cos \frac{1}{2} \text{verschil}$ | 0.0000000    | 9.9999989      | 9.9999993      | 9.9999984      | 9.9999992      | 0.0000000      |
| $\log \sec \frac{1}{2} \text{som}$      | 0.0466432    | 0.0437499      | 0.0358558      | 0.0289794      | 0.0232199      | 0.0210511      |
| $\log \cot \frac{1}{2} P =$             | 1.7485312    | 1.6834981      | 1.9494433      | 1.6910949      | 1.5803179      | 1.5409946      |
|                                         | 1.7951744    | 1.7272469      | 1.9852984      | 1.7200727      | 1.6038370      | 1.5620457      |
| $\frac{1}{2} (C + C) =$                 | 89° 4' 54.68 | 88° 55' 35" 18 | 89° 24' 26" 53 | 88° 54' 30" 84 | 88° 34' 21" 95 | 88° 25' 47" 10 |
| $\frac{1}{2} P =$                       | 1 1 20.00    | 1 11 14 30     | 0 38 37 20     | 1 30 0 20      | 1 30 20 10     | 1 38 53 50     |
| $90^\circ + \frac{1}{2} s =$            | 90 6 14 68   | 90 6 49 48     | 90 3 3 73      | 90 4 31 04     | 90 4 42 05     | 90 4 40 60     |
| $s$                                     | 12' 29" 36   | 13' 38" 96     | 6' 7" 46       | 9' 2" 08       | 9' 24" 10      | 9' 21" 20      |



Door op deze wijze de bewerkingen voort te zetten hebben wij de spherische excessen van al de 39 driehoeken verkregen.

Tabel I. *Spherische excessen der 39 bolvormige driehoeken.*

| n <sup>o</sup> . | ε          | n <sup>o</sup> . | ε          | n <sup>o</sup> . | ε        | n <sup>o</sup> . | ε         | n <sup>o</sup> . | ε           |
|------------------|------------|------------------|------------|------------------|----------|------------------|-----------|------------------|-------------|
| 1                | 12' 29" 36 | 9                | 14' 47" 24 | 17               | 7' 0" 00 | 25               | 5' 39" 60 | 33               | 14' 20" 80  |
| 2                | 12 32 78   | 10               | 15 21 50   | 18               | 7 17 56  | 26               | 6 0 04    | 34               | 3 35 08     |
| 3                | 12 38 26   | 11               | 16 15 30   | 19               | 7 37 52  | 27               | 6 28 18   | 35               | 4 2 80      |
| 4                | 12 47 80   | 12               | 17 23 22   | 20               | 8 0 98   | 28               | 6 55 86   | 36               | 4 45 46     |
| 5                | 12 58 58   | 13               | 6 7 46     | 21               | 8 28 86  | 29               | 7 32 36   | 37               | 5 55 06     |
| 6                | 13 17 40   | 14               | 6 18 26    | 22               | 9 2 08   | 30               | 8 18 54   | 38               | 9 11 86     |
| 7                | 13 38 96   | 15               | 6 30 78    | 23               | 9 44 14  | 31               | 9 24 10   | 39               | 9 21 20     |
| 8                | 14 5 84    | 16               | 6 45 00    | 24               | 10 32 58 | 32               | 11 9 42   | 1-39             | 374' 21" 82 |

D. *Berekening van den inhoud van het bedekte gedeelte der zon en zijne verhouding tot de geheele zichtbare oppervlakte voor den aangenomen afstand der middelpunten.*

Zooals wij reeds hebben opgemerkt, is het halve bedekte gedeelte der zon  $TBC_0T$ , fig. 4, ingesloten door een boog van een grooten cirkel  $C_0T$ , door een boog van een kleinen cirkel  $TB$ , en door eene spherische lijn  $C_0B$ , de doorsnede van het kegelvlak der maan met de oppervlakte der zon, — van welke kromme wij de vergelijking niet kennen, maar die wij aanvankelijk door 39 bogen van groote cirkels hebben vervangen. Dit bedekte gedeelte maakt een deel uit van de oppervlakte  $PBC_0P$ , welke wij in bolvormige driehoeken hebben verdeeld, en verschilt daarvan de oppervlakte van den bijgevoegden driehoek  $PBT$ . De laatstgenoemde driehoek is wederom gelijk aan het verschil van den zuiveren bolvormigen driehoek  $PBS$ , en het bolvormig segment  $BST$ , zoodat wij hebben

$$\text{Inh. } TBC_0 = \text{Inh. } PBC_0 - (\text{Inh. } PBS - \text{Inh. } TBS).$$

Dewijl nu  $PBS$  en  $TBS$  nauwkeurig uit de gegevens kunnen berekend worden, zoo zullen wij ons eerst bezig houden met het vinden van den inhoud  $PBC_0$ .

Genoemde inhoud kan nu op verschillende wijzen bepaald worden, naar gelang men voor de lijntjes, die de deelpunten  $C_0, C_1, C_2, \dots B$  onderling verbinden, den een of anderen vorm meent te mogen aannemen.

In de eerste plaats kan men de strooken, waarin wij de oppervlakte verdeeld hebben, beschouwen als zoovele bolvormige segmenten, waarvan de hoeken aan de pool gelijk zijn aan de in tabel H gevondene hoeken P, en waarvan de boog het gemiddelde der zijden  $PC_0$  en  $PC_1$ ,  $PC_1$  en  $PC_2$ , enz. bedraagt; alsdan neemt men voor de verbindingslijntjes  $C_0C_1$  enz. kleine cirkels aan.

Ten anderen kunnen wij elke strook  $PC_0C_1$  verdeelen in een segment  $PC_0C'$ , dat ontstaat, wanneer men uit P met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een boog beschrijft, die de grootste zijde  $PC_1$  in  $C'$  snijdt, en in een driehoekje  $C_0C'C_1$ , hetwelk dan op een plat vlak moet worden overgebracht.

Dat driehoekje zal rechthoekig zijn, en zijn inhoud kan gevonden worden, hetzij men zijne schuine zijde, ontwikkeld zijnde, als eene rechte lijn, hetzij als eene parabolische kromme van hoogere orde beschouwt.

Ten derde, wanneer de boogjes  $C_0C_1$ , enz. als bogen van groote cirkels worden aangenomen, alsdan moeten alle strooken als bolvormige driehoeken behandeld worden.

1°. *De strooken beschouwd als segmenten met gemiddelde zijden tot boog.*

Noemen wij  $I$  den inhoud van het bolvormig segment, en  $R$  den straal van den bol, dan is

$$I = 2\pi R \times R \text{ Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \times \frac{LC_0PC_1}{360^\circ} = \\ = \pi R^2 \times \frac{LC_0PC_1}{180^\circ} \times \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \dots (26)$$

Ten einde aan de eene zijde te groote getallen, en aan de andere zijde te veel nullen achter het decimaalteeken te vermijden, nemen wij de minuut als eenheid aan; zoodat  $R = 3437'74677$  moet genomen worden. Hierdoor verandert de laatste formule in de volgende

$$I = \frac{\pi}{180^\circ} \times (3437'74677)^2 \times LC_0PC_1 \times \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) (26')$$

of, de factor in logarithmen overgebracht en de hoeken  $C_0PC$  en  $180^\circ$ , in seconden uitgedrukt, verkrijgt men

$$\begin{aligned} 2 \text{ Log } R &= 2 \times 3.5362739 &= 7.0725478 \\ \text{Log } \pi &&= 0.4971499 \\ \text{Colog } 180 \times 3600'' &&= 4.1384250 - 10 \\ \text{Log coëfficient} &&= 1.7581227 \end{aligned}$$

dus 
$$\log I = 1.7581227 + \log \sin \frac{1}{2} (P_0 + P_1) + \log L C_0 P C_1 \text{ (in seconden) } \dots \dots \dots (26')$$

In tabel H worden in de kolom met  $P_1 - P_0$  aan het hoofd de waarden der hoeken  $C_0 P C_1$ , en in de vóórlaatste kolom de sinver-  
sussen van  $\frac{1}{2} (P_0 + P_1)$  opgegeven. De berekening van  $I$  gaat  
nu gemakkelijk en aldus

| Nº.                                 | 1         | 7         | 13        | 22        | 31        |
|-------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $L C_0 P C_1$                       | 7359'9    | 8548'6    | 4634'3    | 8400'3    | 10840'1   |
| $\log C_0 P C_1$                    | 3.8668719 | 3.9318950 | 3.6659841 | 3.9242948 | 4.0350833 |
| $\log \sin \frac{1}{2} (P_0 + P_1)$ | 9.0078971 | 8.9814834 | 8.8989664 | 8.8098962 | 8.7165208 |
| $\log \sin \text{coëfficient}$      | 1.7581227 | 1.7581227 | 1.7581229 | 1.7581227 | 1.7581227 |
| $\log I$                            | 4.6328917 | 4.6715011 | 4.3230734 | 4.4923187 | 4.5096768 |
| $I =$                               | 42942.93  | 46935.47  | 21041.33  | 31068.03  | 32335.20  |

Op deze wijze zijn de inhouden van alle 39 bolvormige segmenten berekend, waarvan de uitkomsten in de volgende tabel K gevonden worden.

Tabel K. *Inhouden der bolvormige segmenten.*

| Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº.  | Inhoud.    |
|-----|----------|-----|----------|-----|----------|------|------------|
| 1   | 42942'93 | 11  | 55912'16 | 21  | 29169'70 | 31   | 32335'29   |
| 2   | 43109 24 | 12  | 59813 24 | 22  | 31068 03 | 32   | 38378 92   |
| 3   | 43459 15 | 13  | 21041 33 | 23  | 33480 26 | 33   | 49486 37   |
| 4   | 43997 03 | 14  | 21678 70 | 24  | 36389 43 | 34   | 12325 65   |
| 5   | 44748 10 | 15  | 22396 22 | 25  | 19454 84 | 35   | 13920 00   |
| 6   | 45699 92 | 16  | 23189 98 | 26  | 20629 30 | 36   | 16289 86   |
| 7   | 46935 47 | 17  | 24070 00 | 27  | 22087 57 | 37   | 20346 88   |
| 8   | 48539 03 | 18  | 25073 44 | 28  | 23834 87 | 38   | 31640 04   |
| 9   | 50411 08 | 19  | 26218 57 | 29  | 25926 26 | 39   | 32171 30   |
| 10  | 52826 95 | 20  | 27563 03 | 30  | 28471 40 | 1—39 | 1287031.54 |

De inhouden dezer 39 driehoekjes bij elkander geteld, verkrijgt men voor hunne som den gevraagden inhoud van

$$PBC_0 = 1,286,031'54 \square \text{ minuten.}$$

De vorm der formule (26) geeft wel aanleiding, om den inhoud van een bolvormig segment als eene volkomen ontwikkelbare oppervlakte op een plat vlak over te brengen. Immers zij bestaat uit

twee factoren 1°.  $2\pi R \times \frac{\angle C_0 PC_1}{360}$ , dat is, een gedeelte van den

omtrek van den grooten cirkel van den bol, en 2°.  $R \sinvers \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1)$ , dat is de sinusversus van den boog van het segment; en daar deze beide factoren zich in dezelfde eenheid laten uitdrukken, zoo zal de oppervlakte van elk bolvormig segment kunnen voorgesteld worden door een op schaal geteekenden platten rechthoek. Alle onze 39 bolvormige segmenten zullen dan zoovele rechthoeken kunnen voorstellen, met den eersten factor als grondlijnen of abcissen en met den tweeden als opstaande zijden of ordinaten; en wanneer wij nu al die grondlijnen naast elkander op eene rechte lijn plaatsen, en dus ook de rechthoeken, die ook verschillende hoogten hebben, dan zal de fig. 5 den geheelen inhoud  $PBC_0$ , op een plat vlak ontwikkeld, voorstellen. De geheele basis van de aldus ontstane figuur zal dan,  $R$  weder in minuten uitdrukkende, gelijk zijn aan

$$2\pi R \times \frac{\angle PBC_0}{360} = 2\pi \times 3437'.74677 \times \frac{89^\circ 5' 7''}{360} \text{ (tabel G)} = 5345' 12,$$

de hoogte van den eersten rechthoek  $= R \times \text{Sinv } 26^\circ 4' 55'' 7 = 3437'.74677 \times 0.101825 = 349' 963$ ; en die van den laatsten  $= 3437'.74677 \times 0.047316 = 161' 610$ . Nemen wij nu, om de figuur te teekenen, bijv. voor iedere 1000' van de basis eene lengte van 25 mm., en, ten einde de kromte der lijn beter te doen uitkomen, voor iedere 100' der hoogte eene lengte van 50 mm., dan ontstaat figuur 5, waarin al de 39 segmenten afgekort, om ruimte te winnen, naast elkander voorkomen.

## 2°. De strooken verdeeld in segmenten en driehoekjes.

Wanneer wij in elke strook  $C_0 PC_1$  uit de pool  $P$  met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een cirkelboogje beschrijven, die de langste zijde  $PC_1$  in  $C'$  ontmoet, dan verdeelen wij die allen in segmenten met hunne kleinste zijden tot boog, en in een driehoekje  $C_0 C_1 C'$ . De inhouden van de achtereenvolgende segmenten worden dan op de zoo even aangewezen manier, doch met de kleinste zijde als boog, nauwkeurig gevonden; doch de inhouden der driehoekjes, — daar voor deze geene formule op den bol te vinden is, en zij dus ook niet volkomen op een plat vlak kunnen worden uitgelegd —, moeten door benadering gevonden worden.

Berekenen wij eerst de inhouden der segmenten. Hiertoe moeten wij nemen de sinus-versussen der kleinste bogen van elken driehoek,

welker waarden in de laatste kolom van tabel H gevonden worden. De berekening geschiedt weder volgens formule (26<sup>b</sup>).

*Tabel L. Inhouden der bolvormige segmenten.*

| N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.    |
|------------------|----------|------------------|----------|------------------|----------|------------------|------------|
| 1                | 42912'99 | 11               | 54817'04 | 21               | 28757'11 | 31               | 31954'57   |
| 2                | 43021 37 | 12               | 58436 57 | 22               | 30606 47 | 32               | 37899 28   |
| 3                | 43313 16 | 13               | 20860 24 | 23               | 32943 68 | 33               | 48830 72   |
| 4                | 43779 58 | 14               | 21480 97 | 24               | 35763 03 | 34               | 12292 25   |
| 5                | 44441 34 | 15               | 22179 57 | 25               | 19278 30 | 35               | 13877 17   |
| 6                | 45323 52 | 16               | 22951 80 | 26               | 20435 07 | 36               | 16236 77   |
| 7                | 46466 72 | 17               | 23809 33 | 27               | 21869 67 | 37               | 20283 60   |
| 8                | 47896 83 | 18               | 24784 90 | 28               | 23587 18 | 38               | 31530 35   |
| 9                | 49697 42 | 19               | 25897 99 | 29               | 25645 81 | 39               | 32114 86   |
| 10               | 51947 07 | 20               | 27211 00 | 30               | 28142 56 | 1-39             | 1273282.86 |

*Berekening van de inhouden der driehoekjes.*

Leggen wij zooveel doenlijk de overgeblevene driehoekjes op een plat vlak neêr, dan zullen zij, dewijl de zijden der segmenten loodrecht op hunne basissen staan, ook rechthoekige driehoekjes moeten vormen, wier basissen, ontwikkeld, gelijk zijn aan den boog van den kleinen cirkel, die ook de bogen der segmenten vormt, en wier hoogten, mede ontwikkeld, gelijk zijn aan het verschil der zijden van iedere strook of segment; derhalve hunnen

$$\text{Inhoud} = (L C_0 P C_1 \times \sin P C_1) \times \frac{1}{2} (P C_0 - P C_1).$$

Voor de inhouden dezer driehoekjes, als zoodanig beschouwd, vinden wij in tabel M de volgende waarden.

*Tabel M. Inhoud der rechthoekige driehoekjes.*

| N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. |
|------------------|---------|------------------|---------|------------------|---------|------------------|---------|
| 1                | 30'01   | 11               | 1092'23 | 21               | 411'14  | 21               | 379'60  |
| 2                | 88 24   | 12               | 1368 30 | 22               | 460 42  | 32               | 478 21  |
| 3                | 150 45  | 13               | 180 95  | 23               | 533 10  | 33               | 654 37  |
| 4                | 217.00  | 14               | 197 35  | 24               | 623 57  | 34               | 33 99   |
| 5                | 289 50  | 15               | 216 03  | 25               | 174 44  | 35               | 39 56   |
| 6                | 370 46  | 16               | 237 44  | 26               | 193 33  | 36               | 48 19   |
| 7                | 464 31  | 17               | 260 21  | 27               | 217 75  | 37               | 62 48   |
| 8                | 575 43  | 18               | 287 67  | 28               | 246 69  | 38               | 109 35  |
| 9                | 709 93  | 19               | 319 55  | 29               | 280 01  | 39               | 56 19   |
| 10               | 876 11  | 20               | 350 76  | 30               | 317 25  | 1-39             | 186.02  |

De voorgaande berekening van de inhouden der driehoekjes, als plat en rechthoekig beschouwd, mogen wij niet als nauwkeurig genoeg houden, dewijl wij daardoor van de onderstelling zijn uitgegaan, dat hunne schuine zijden rechte lijnen zijn. De loop der kromme lijn van figuur 5 doet immers zien, dat wij die onderstelling, vooral niet bij het begin en het einde der kromme mogen aannemen, maar dat wij de schuine lijnen der driehoekjes moeten vervangen door kromme lijnen. Wij komen alzoo tot het vraagstuk om den inhoud eener vlakke kromme lijn bij benadering te vinden.

Zooals men weet, beschouwt men voor dat doel, de kromme als eene parabool van hoogere macht, en neemt men tot gemak der berekening alle opvolgende abcissenverschillen aan elkander gelijk; voor welke abcissen dan de ordinaten der kromme moeten bekend zijn. Alvorens wij dus tot de inhoudvinding van onze driehoekjes kunnen overgaan, is het allereerst noodig, dat wij de waarden van de hoeken P of der deelen van de basis van ieder der segmenten afzonderlijk even groot maken, en daarna voor elk dier abcissen de overeenkomstige waarden der ordinaten berekenen.

Deze bewerking geeft de gelegenheid aan de hand om de nauwkeurigheid der inhoudsvinding binnen veel engere grenzen te brengen dan wij tot hiertoe gedaan hebben, dewijl daardoor het aantal deelen, waarin elke basis verdeeld wordt, meer en meer vergroot wordt. Het komt ons voor, dat wij ons doel, eenen genoegzamen graad van nauwkeurigheid, zullen bereiken, wanneer wij ons voor de verdeeling bepalen tot iedere 10' boogs van  $\phi$ , alzoo dat elk der bogen van 0 tot 1°, van 1—2° ... en van 11 tot 12° nog in zes; en de bogen 12° tot 12° 20', enz. ... en van 15° 40' tot 16° nog in twee gelijke deelen worden verdeeld; door welke onderverdeeling onze kromme lijn van figuur 5, in 112 punten verdeeld wordt. Ware PC in functie van P gegeven, dan zou het eenvoudiger geweest zijn, de hoeken P van ieder der hierboven genoemde driehoeken in 6 of in 2 gelijke deelen te verdeelen, en voor die tusschenwaarden de PC of de ordinaten volgens de alsdan bestaande formule te berekenen. Nu echter kunnen wij niet anders dan òf met de nieuwe waarden van  $\phi$  die grootheden P en PC volgens formule 20' onmiddellijk berekenen, òf die door interpolatiën vinden. Wij hebben de laatste bewerking als de eenvoudigste verkozen, en zoeken, uit de gegevens van tabel G, de tusschenwaarden van P en PC, door eerst in de helft, en later in drieën te interpoleeren. Wij vinden dan

Het tweede gedeelte  $N$  is gelijk de beide volgende

$$\begin{aligned} \int N d\phi &= \int \sqrt{r^2 - \rho^2 - a^2 \cos 2\phi + 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}} d\phi - \\ &- \int \frac{1}{2} \{ \rho^2 + a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi} \} \times \\ &\times \sqrt{r^2 - \rho^2 - a^2 \cos 2\phi + 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}} d\phi. \end{aligned}$$

Stellen wij, in plaats van den wortelvorm

$$\sqrt{1-p} = 1 - \frac{p}{2} - \frac{p^2}{8} - \frac{p^3}{16} - \dots, \dots (19'')$$

dan komt er

$$\begin{aligned} (N_1) + \sqrt{r^2 - \rho^2} \int &\left\{ 1 - \frac{a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}}{2(r^2 - \rho^2)} - \right. \\ &- \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^2}{8(r^2 - \rho^2)^2} - \\ &- \left. \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^3}{16(r^2 - \rho^2)^3} \right\} d\phi - \\ &- \int \frac{1}{2} (\rho^2 + a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}) \times \\ &\times \sqrt{r^2 - \rho^2} \left\{ 1 - \frac{a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}}{2(r^2 - \rho^2)} - \right. \\ &- \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^2}{8(r^2 - \rho^2)^2} - \\ &- \left. \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^3}{16(r^2 - \rho^2)^3} \right\} d\phi. \end{aligned}$$

Het oplossen dezer integraalformule zou neerkomen op het berekenen van 33 nog al vrij samengestelde termen, onder verwaarloozing van de vierde en hoogere machten der reeks, waarin  $\sqrt{1-p}$  (19'') ontwikkeld is.

Heeft men de waarde van  $r \int \cos \beta d\phi$  gevonden, dan moet die nog door  $r$  gedeeld en dat quotient van  $\phi$  worden afgetrokken, om den inhoud te verkrijgen van het driehoekig stuk  $SC_0B$  (fig. 4).

Wij willen nu gaan onderzoeken, of deze integraalformule toegepast kan worden, 1° in het algemeen, of 2° in het bijzonder voor ons geval.

Voor eene algemeene toepasselijkheid moeten in de eerste plaats de coëfficiënten der onderscheidene termen kleiner en kleiner worden, hoe meer termen men van  $\sqrt{1-p}$  (19'') neemt. Wij zien dade-

lijk, dat bijna al de termen zijn aangedaan door een coëfficiënt van den vorm  $\frac{a'' \rho'}{(r^2 - \rho^2)'}:$  en het zal dus hoofdzakelijk van de waarde van  $(r^2 - \rho^2)$  afhangen, of de reeks al dan niet convergeert. En al dadelijk zien wij in, dat daar  $r$  en  $\rho$  bijna aan elkander gelijk kunnen zijn,  $(r^2 - \rho^2)'$  eene zeer kleine grootheid worden kan, en dus de breuk  $\frac{a'' \rho'}{(r^2 - \rho^2)'}$  in diezelfde en boven mate zal vergroot worden.

Stellen wij b. v.  $r = 1000''$  en  $\rho = 999''$  of  $r = 0.0048481368$   
 $\rho = 0.0048432886$  voor den straal  $= 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{dan is} \quad (r^2 - \rho^2)' &= 0.0000.0004.6992, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} &= 0.0002.1677.0850, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} &= 0. 0^{10}.1019, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} &= 0. 0^{18}.4787, \\ &\text{enz.} \end{aligned}$$

Daar nu de tellers der breuken,  $a$  en  $\rho$  standvastig blijvende, bij elke benadering hoogstens een tweede macht hooger klimmen, zoo zal deze integraalformule in het algemeen des te minder convergeren en zelfs divergeren, naarmate meer benaderingen aangewend worden.

Of nu de integraalformule ook in ons geval, namelijk voor  $r = 1000''$ ,  $\rho = 900''$  en  $a = 1800''$ , nog bruikbaar is, willen wij alleen wijzen op het toenemen van coëfficiënten der termen, die van de termen  $\frac{p^2}{8}$  en  $\frac{p^3}{16}$  en van de hoogere machten van  $\sqrt{1-p}$  afhangen, die wij niet noodig gevonden hebben verder te ontwikkelen.

Er doet zich tot eene algemeene toepassing dezer integraalformule, of beter gezegd tot het vinden van den inhoud van driehoek  $SO_0B$ , bovendien nog eene andere zwaarigheid op. In fig. 3 is namelijk de stand der schijven van zon en maan zóó voorgesteld, dat de boog  $C_0B$  door alle bogen  $SC$  slechts in één punt gesneden wordt; in die gevallen, maar ook in die alleen, mag men stellen

$$TC_0B = TSB - C_0SB \dots\dots\dots (18)$$

Dit heeft echter niet altijd plaats, want, wanneer de middelpunten van zon en maan zich meer en meer naderen tot dat de maansrand bijna op het middelpunt der zon valt, dan komen daaronder standen voor, waarin enkele bogen  $C_0C$  den boog  $C_0B$  in twee



punten zullen aasijden; en dan zou het hoogst moeilijkt zijn, den inhoud van  $SC_0B$ , op wat manier ook, te bepalen.

Om alle welke redenen wij het vinden van den inhoud  $SC_0B$  door middel eener integraalformule hebben moeten opgeven.

*C. Voorbereidende berekening tot het vinden van den inhoud der bedekte oppervlakte.*

Nu geene der aangewende methoden van integratie ons hebben geleid tot het vinden van den bewusten inhoud, bleef ons niets anders over dan de bepaling van dien inhoud door verdeeling der oppervlakte in driehoekjes. Tevens moesten wij eene methode aanwenden die voor alle gevallen, die in het vraagstuk kunnen voorkomen, aanwendbaar was.

Deze methode bestond daarin, dat wij eene oppervlakte berekenen, die niet zooals de driehoek  $C_0SC$  somtijds onmogelijk te berekenen was, maar een driehoek, die bij alle afstanden der middelpunten berekend konde worden; en deze is de driehoek  $TC_0B$ , dezelfde driehoek, wiens inhoud wij kennen moeten.

Tot dat einde hebben wij den hoog  $ST$  (fig. 4) tot  $90^\circ$  in  $P$  verlengd, en door  $P$  en  $B$  een hoog  $PB$  van een grooten cirkel gebracht. Alsdan is inhoud

$$TC_0B = PC_0B - PTB = PC_0B - (PSB - TSB) \dots (19)$$

Dewijl nu de hoek  $C_0PB$  blijkbaar eene functie van twee der elementen  $\phi$  en  $\beta$  van den driehoek  $SC_0B$  moet zijn, en wij de laatste oppervlakte te bezwarend gevonden hebben om te integreeren, zoo kan er des te minder sprake zijn van eene integratie der oppervlakte  $PC_0B$ , en schiet er dus ten laatste niets anders over dan deze in een aantal driehoekjes te verdeelen, en van ieder dezer driehoekjes den inhoud te zoeken. Daartoe brengen wij door alle punten  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  en de pool  $P$ , bogen van groote cirkels, die daardoor de oppervlakte  $PC_0B$  in even zoo vele driehoekjes verdeelen, wier twee zijden bogen van groote cirkels, en de derde zijden deelen uitmaken van de kromme  $C_0B$  van doorsnijding.

Om de elementen van deze driehoeken, waardoor hunne inhouden bepaald kunnen worden, te vinden, moeten wij eerst bekend hebben de hoeken  $P$  en de zijden  $PC$  van elken driehoek  $C_1PC_2$ , enz.; deze grootheden worden op de volgende wijze gevonden.

In elk der driehoeken  $SPC$  zijn gegeven  $SP = 90^\circ$ ,  $SC = \beta$  uit tabel E, en de ingesloten hoek  $PSC = \phi$ ; de waarde van  $\beta$  is

daarbij eene functie van SC in  $\phi$  (tabel F). Door deze gegevens worden de onbekende grootheden P en PC door een der beide volgende stellen formules berekend.

Laat men uit eenig punt C, fig. 4, een loodrechten boog CD op de basis SP neêr, die deze in het punt D in twee stukken SD =  $\gamma$  en PD =  $90^\circ - \gamma$  snijdt, dan heeft men

$$Tg SD = Tg SC \cdot Cos S,$$

$$Sin SD : Sin PD = Cot S : Cot P,$$

en 
$$Cos SD : Cos PD = Cos SC : Cos PC,$$

of wel 
$$Tg \gamma = Tg \beta \cdot Cos \phi,$$

$$\left. \begin{aligned} Sin \gamma : Sin (90^\circ - \gamma) &= Cot \phi : Cot P \quad \text{of} \quad Cot P = Cot \gamma \cdot Cot \phi, \\ Cos \gamma : Cos (90^\circ - \gamma) &= Cos \beta : Cos PC \quad \text{of} \quad Cos PC = Tg \gamma \cdot Cos \beta. \end{aligned} \right\} (20)$$

Brengt men de waarde van  $Tg \gamma = Tg \beta \cdot Cos \phi$  in de beide laatste over, dan komt er

$$Cot P = \frac{Cot \beta}{Sin \phi} \quad \text{en} \quad Cos PC = Sin \beta \cdot Cos \phi; \dots (20^a)$$

of wel, met behulp der Neperiaansche analogiën,

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2} (C + P) &= \frac{Cos \frac{1}{2} (SP - SC)}{Cos \frac{1}{2} (SP + SC)} \cdot Cot \frac{1}{2} S, \\ Tg \frac{1}{2} (C - P) &= \frac{Sin \frac{1}{2} (SP - SC)}{Sin \frac{1}{2} (SP + SC)} \cdot Cot \frac{1}{2} S, \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

en 
$$Tg \frac{1}{2} PC = Tg \frac{1}{2} (SP + SC) \frac{Cos \frac{1}{2} (C + P)}{Cos \frac{1}{2} (C - P)} = Tg \frac{1}{2} (SP - SC) \frac{Sin \frac{1}{2} (C + P)}{Sin \frac{1}{2} (C - P)},$$

of in plaats van deze laatste

$$Sin PC = \frac{Sin \phi}{Sin P} Sin SC.$$

Deze laatste formules ondergaan, door SP =  $90^\circ$  daarin over te brengen, de volgende vereenvoudigingen

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2} (C + P) &= Tg \frac{1}{2} (90^\circ + \beta) \cdot Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2} (P - C) &= Cotg \frac{1}{2} (90^\circ + \beta) \cdot Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2} PC &= Cot \frac{1}{2} (90^\circ + \beta) \frac{Cos \frac{1}{2} (C + P)}{Cos \frac{1}{2} (C - P)}. \end{aligned} \right\} \dots (21^a)$$

De berekeningen volgens het eerste stel formuli (20<sup>a</sup>) loopen spoediger af; zij volgen hier voor eenige waarden van  $\phi$ .

| $\phi =$               | 1°        | 6°         | 12°        | 15°        | 17°        | 17°40'     |
|------------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\beta =$              | 63°56'42" | 65°15'25"  | 70°9'24"   | 75°20'27"  | 82°8'26"   | 88°43'12"  |
| <i>Log Cot</i> $\beta$ | 9.6892390 | 9.6635684  | 9.5573588  | 9.4176104  | 9.1400052  | 8.3491597  |
| <i>Log Sin</i> $\phi$  | 8.2418553 | 9.0192346  | 9.3178789  | 9.4129962  | 9.4659353  | 9.4821283  |
| <i>Log Cot</i> P       | 1.4473837 | 0.6443338  | 0.2394799  | 0.0046142  | 9.6740699  | 8.8670314  |
| P =                    | 2°2'39"9  | 12°46'49"0 | 29°56'51"0 | 44°41'44"3 | 64°43'34"3 | 85°47'20"9 |
| <i>Log Sin</i> $\beta$ | 9.9534565 | 9.9581786  | 9.9734162  | 9.9856278  | 9.9959011  | 9.9998916  |
| <i>Log Cos</i> $\phi$  | 9.9999338 | 9.9976143  | 9.9904044  | 9.9849488  | 9.9805963  | 9.9790192  |
| <i>Cos</i> PC          | 9.9533903 | 9.9557929  | 9.9638206  | 9.9705716  | 9.9764974  | 9.9789108  |
| PC =                   | 26°4'22"4 | 25°24'56"1 | 23°3'49"4  | 20°51'18"8 | 18°40'48"3 | 17°42'41"4 |

De overige waarden van P en PC worden in tabel G gevonden.

De gevondene waarden voor den hoek P en de zijde PC<sub>n</sub> van iederen bolvormigen driehoek PC<sub>n-1</sub>P<sub>n</sub> kunnen, dewijl in ieder van deze twee zijden PC<sub>n-1</sub> en PC<sub>n</sub> en de ingesloten hoek P<sub>n</sub>-P<sub>n-1</sub> bekend zijn, gebruikt worden om den inhoud van ieder dezer driehoeken, door middel van hunne spherische excessen, te berekenen.

Het is namelijk uit de bolvormige driehoeksmeting bekend, dat de inhoud van iederen bolvormigen driehoek tot dien van het spherisch octant dezelfde verhouding heeft als zijn spherisch exces tot een rechten hoek. Stelt I den inhoud van een bolvormigen driehoek,  $\Delta$  dien van het spherisch octant, en  $\varepsilon$  het spherisch exces voor, dan is

$$I : \Delta = \varepsilon : 90^\circ, \text{ of } I = \frac{90}{\varepsilon} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

of, wel, wanneer A, B, C de hoeken van den driehoek beteekenen

$$I = \frac{(A + B + C) - 180^\circ}{90^\circ} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

Het spherisch exces  $\varepsilon$ , dat onmiddellijk van de grootte der hoeken eens bolvormigen driehoeks afhangt, zal dus gevonden worden, wanneer men 180° van de som der hoeken aftrekt. Zijn de gegevens van een driehoek andere dan de drie hoeken, in ons geval twee zijden en de ingesloten hoek, dan vindt men  $\varepsilon$  door de formule

$$\cot \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cdot \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C},$$

welke, door te stellen  $\frac{\cot \frac{1}{2} a \cdot \cot \frac{1}{2} b}{\cos C} = \text{Tg}^2 \mu,$

tot dezen, beter voor de berekening geschikt, vorm wordt omgezet

$$Tg \frac{1}{2} \varepsilon = Tg C \cos^2 \mu \dots \dots \dots (24)$$

Hoewel deze formule eenvoudig genoeg voor de bewerking is, geven wij toch aan de eerste de voorkeur, namelijk, aan het berekenen der beide overige hoeken van den driehoek. Daartoe hebben wij niets anders noodig dan de som der beide overige hoeken, en kunnen wij volstaan met de berekening van de eerste formule der Neperiaansche analogiën

$$Tg \frac{1}{2} (C_{n-1} + C_n) = \frac{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} - PC_n)}{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} + PC_n)} \cot \frac{1}{2} (P_n - P_{n-1}) \dots (25)$$

Wanneer wij de waarden van SC uit tabel F, voor waarden van  $\phi$  van 10 tot 10' wilden interpoleeren, en voor deze in tabel E de overeenkomstige waarden van  $\beta$  zoeken, en verder, voor al die waarden van  $\phi$ , P en PC uit tabel G interpoleren, dan zouden wij de geheele bedekte oppervlakte der zon in 112 bolvormige driehoeken verdeelen.

Het komt ons echter voor, dat de nauwkeurigheid ver genoeg voortgezet zal zijn, zoo wij ons voor de berekening van den inhoud bepalen tot de waarden van  $\phi$ , in tabel F aangenomen, in welk geval er nog 39 bolvormige driehoeken te berekenen zijn; welke inhouden dan wellicht met minder moeite tot elken gewenschten graad van nauwkeurigheid kunnen geïnterpoleerd worden.

Deze laatste verdeling in 39 driehoeken behoudende, zoeken wij eerst de elementen derzelfde uit tabel G, welke wij in tabel H mede deelen, om dan daarmede met behulp der formule (25), de halve som der onbekende hoeken te berekenen. Tabel H bevat nog in hare laatste kolommen de sinus-versussen zoowel der enkele zijden als die van hunne gemiddelde waarden, welke wij later noodig zullen hebben.

Ziehier de berekening van het spherisch excès  $\varepsilon$ .

| Driehoek N°.                                     | 1            | 7              | 13             | 22             | 31             | 39             |
|--------------------------------------------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\frac{1}{2} (PC_0 - PC_1) =$                    | 0° 0' 33" 4  | 0° 7' 41" 4    | 0° 6' 1" 8     | 0° 9' 22" 6    | 0° 6' 38" 2    | 0° 0' 59" 7    |
| $\frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) =$                    | 26 4 55 7    | 25 17 15 8     | 22 57 47 7     | 20 41 56 5     | 18 34 10 2     | 17 41 44 7     |
| $\frac{1}{2} (P_1 - P_0) =$                      | 1 1 20 0     | 1 11 14 3      | 0 38 37 2      | 1 10 0 2       | 1 30 20 1      | 1 38 53 5      |
| <i>Log Cos <math>\frac{1}{2}</math> verschil</i> | 0.0000000    | 9.9999989      | 9.9999993      | 9.9999984      | 9.9999992      | 0.0000000      |
| <i>Log Sec <math>\frac{1}{2}</math> som</i>      | 0.0466432    | 0.0487499      | 0.0358558      | 0.0289794      | 0.0232199      | 0.0210511      |
| <i>Log Cot <math>\frac{1}{2}</math> P =</i>      | 1.7485812    | 1.6834981      | 1.9494433      | 1.6910949      | 1.5803179      | 1.5409946      |
|                                                  | 1.7951744    | 1.7272469      | 1.9852984      | 1.7200727      | 1.6035370      | 1.5620457      |
| $\frac{1}{2} (C + C) =$                          | 89° 4' 54.68 | 88° 55' 35" 18 | 89° 24' 26" 53 | 88° 54' 30" 84 | 88° 34' 21" 95 | 88° 25' 47" 10 |
| $\frac{1}{2} P =$                                | 1 1 20.00    | 1 11 14 30     | 0 38 37 20     | 1 30 0 20      | 1 30 20 10     | 1 38 53 50     |
| $90^\circ + \frac{1}{2} \varepsilon =$           | 90 6 14 68   | 90 6 49 48     | 90 3 3 73      | 90 4 31 04     | 90 4 42 05     | 90 4 40 60     |
| $\varepsilon$                                    | 12' 29" 36   | 13' 38" 96     | 6' 7" 46       | 9' 2" 08       | 9' 24" 10      | 9' 21" 20      |

Door op deze wijze de bewerkingen voort te zetten hebben wij de spherische excessen van al de 39 driehoeken verkregen.

*Tabel I. Spherische excessen der 39 bolvormige driehoeken.*

| n <sup>o</sup> . | ε          | n <sup>o</sup> . | ε          | n <sup>o</sup> . | ε        | n <sup>o</sup> . | ε         | n <sup>o</sup> . | ε           |
|------------------|------------|------------------|------------|------------------|----------|------------------|-----------|------------------|-------------|
| 1                | 12' 29" 36 | 9                | 14' 47" 24 | 17               | 7' 0" 00 | 25               | 5' 39" 60 | 33               | 14' 20" 80  |
| 2                | 12 32 78   | 10               | 15 21 50   | 18               | 7 17 56  | 26               | 6 0 04    | 34               | 3 35 08     |
| 3                | 12 38 26   | 11               | 16 15 30   | 19               | 7 37 52  | 27               | 6 28 18   | 35               | 4 2 80      |
| 4                | 12 47 80   | 12               | 17 23 22   | 20               | 8 0 98   | 28               | 6 55 86   | 36               | 4 45 46     |
| 5                | 12 58 58   | 13               | 6 7 46     | 21               | 8 28 86  | 29               | 7 32 36   | 37               | 5 55 06     |
| 6                | 13 17 40   | 14               | 6 18 26    | 22               | 9 2 08   | 30               | 8 18 54   | 38               | 9 11 86     |
| 7                | 13 38 96   | 15               | 6 30 78    | 23               | 9 44 14  | 31               | 9 24 10   | 39               | 9 21 20     |
| 8                | 14 5 84    | 16               | 6 45 00    | 24               | 10 32 58 | 32               | 11 9 42   | 1-39             | 374' 21" 82 |

*D. Berekening van den inhoud van het bedekte gedeelte der zon en zijne verhouding tot de geheele zichtbare oppervlakte voor den aangenomen afstand der middelpunten.*

Zooals wij reeds hebben opgemerkt, is het halve bedekte gedeelte der zon  $TBC_0T$ , fig. 4, ingesloten door een boog van een grooten cirkel  $C_0T$ , door een boog van een kleinen cirkel  $TB$ , en door eene spherische lijn  $C_0B$ , de doorsnede van het kegelvlak der maan met de oppervlakte der zon, — van welke kromme wij de vergelijking niet kennen, maar die wij aanvankelijk door 39 bogen van groote cirkels hebben vervangen. Dit bedekte gedeelte maakt een deel uit van de oppervlakte  $PBC_0P$ , welke wij in bolvormige driehoeken hebben verdeeld, en verschilt daarvan de oppervlakte van den bijgevoegden driehoek  $PBT$ . De laatstgenoemde driehoek is wederom gelijk aan het verschil van den zuiveren bolvormigen driehoek  $PBS$ , en het bolvormig segment  $BST$ , zoodat wij hebben

$$Inh. TBC_0 = Inh. PBC_0 - (Inh. PBS - Inh. TBS).$$

Dewijl nu  $PBS$  en  $TBS$  nauwkeurig uit de gegevens kunnen berekend worden, zoo zullen wij ons eerst bezig houden met het vinden van den inhoud  $PBC_0$ .

Genoemde inhoud kan nu op verschillende wijzen bepaald worden, naar gelang men voor de lijntjes, die de deelpunten  $C_0, C_1, C_2, \dots B$  onderling verbinden, den een of anderen vorm meent te mogen aannemen.

In de eerste plaats kan men de strooken, waarin wij de oppervlakte verdeeld hebben, beschouwen als zoovele bolvormige segmenten, waarvan de hoeken aan de pool gelijk zijn aan de in tabel H gevondene hoeken P, en waarvan de boog het gemiddelde der zijden  $PC_0$  en  $PC_1$ ,  $PC_1$  en  $PC_2$  enz. bedraagt; alsdan neemt men voor de verbindingslijntjes  $C_0C_1$  enz. kleine cirkels aan.

Ten anderen kunnen wij elke strook  $PC_0C_1$  verdeelen in een segment  $PC_0C'$ , dat ontstaat, wanneer men uit P met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een boog beschrijft, die de grootste zijde  $PC_1$  in  $C'$  snijdt, en in een driehoekje  $C_0C'C_1$ , hetwelk dan op een plat vlak moet worden overgebracht.

Dat driehoekje zal rechthoekig zijn, en zijn inhoud kan gevonden worden, hetzij men zijne schuine zijde, ontwikkeld zijnde, als eene rechte lijn, hetzij als eene parabolische kromme van hoogere orde beschouwt.

Ten derde, wanneer de boogjes  $C_0C_1$ , enz. als bogen van groote cirkels worden aangenomen, alsdan moeten alle strooken als bolvormige driehoeken behandeld worden.

1°. *De strooken beschouwd als segmenten met gemiddelde zijden tot boog.*

Noemen wij  $I$  den inhoud van het bolvormig segment, en  $R$  den straal van den bol, dan is

$$\begin{aligned} I &= 2\pi R \times R \text{ Sinvers } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) \times \frac{\angle C_0PC_1}{360^\circ} = \\ &= \pi R^2 \times \frac{\angle C_0PC_1}{180^\circ} \times \text{Sinvers } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) \dots (26) \end{aligned}$$

Ten einde aan de eene zijde te groote getallen, en aan de andere zijde te veel nullen achter het decimaalteeken te vermijden, nemen wij de minuut als eenheid aan; zoodat  $R = 3437'74677$  moet genomen worden. Hierdoor verandert de laatste formule in de volgende

$$I = \frac{\pi}{180^\circ} \times (3437'74677)^2 \times \angle C_0PC_1 \times \text{Sinvers } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) \quad (26')$$

of, de factor in logarithmen overgebracht en de hoeken  $C_0PC$  en  $180^\circ$ , in seconden uitgedrukt, verkrijgt men

$$\begin{aligned} 2 \log R &= 2 \times 3.5362739 &= 7.0725478 \\ \log \pi &&= 0.4971499 \\ \text{Colog } 180 \times 3600'' &&= 4.1884250 - 10 \\ \log \text{coëfficient} &&= 1.7581227 \end{aligned}$$

dus 
$$\text{Log } I = 1.7581227 + \text{Log Sinvers } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) + \text{Log } \angle C_0 PC_1 \text{ (in seconden) } \dots \dots \dots (26')$$

In tabel H worden in de kolom met  $P_1 - P_0$  aan het hoofd de waarden der hoeken  $C_0 PC_1$ , en in de vóórlaatste kolom de sinversussen van  $\frac{1}{2} (PC_0 + PC_1)$  opgegeven. De berekening van  $I$  gaat nu gemakkelijk en aldus

| Nº.                                           | 1         | 7         | 13        | 22        | 31        |
|-----------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\angle C_0 PC_1$                             | 7359°9    | 8548°6    | 4634°3    | 8400°3    | 10840°1   |
| $\text{Log } C_0 PC_1$                        | 3.8668719 | 3.9318950 | 3.6659841 | 3.9242948 | 4.0350333 |
| $\text{Log Sinvs } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1)$ | 9.0078971 | 8.9814834 | 8.8989664 | 8.8098962 | 8.7165208 |
| $\text{Log Sinvs coefficient}$                | 1.7581227 | 1.7581227 | 1.7581229 | 1.7581227 | 1.7581227 |
| $\text{Log } I$                               | 4.6328917 | 4.6715011 | 4.3230734 | 4.4923137 | 4.5096768 |
| $I =$                                         | 42942.93  | 46935.47  | 21041.33  | 31068.03  | 32335.20  |

Op deze wijze zijn de inhouden van alle 39 bolvormige segmenten berekend, waarvan de uitkomsten in de volgende tabel K gevonden worden.

Tabel K. *Inhouden der bolvormige segmenten.*

| Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº.  | Inhoud.    |
|-----|----------|-----|----------|-----|----------|------|------------|
| 1   | 42942'93 | 11  | 55912'16 | 21  | 29169'70 | 31   | 32335'29   |
| 2   | 43109 24 | 12  | 59813 24 | 22  | 31068 03 | 32   | 38378 92   |
| 3   | 43459 15 | 13  | 21041 33 | 23  | 33480 26 | 33   | 49486 37   |
| 4   | 43997 03 | 14  | 21678 70 | 24  | 36389 43 | 34   | 12325 65   |
| 5   | 44748 10 | 15  | 22396 22 | 25  | 19454 84 | 35   | 13920 00   |
| 6   | 45699 92 | 16  | 23189 98 | 26  | 20629 30 | 36   | 16289 86   |
| 7   | 46935 47 | 17  | 24070 00 | 27  | 22087 57 | 37   | 20346 88   |
| 8   | 48539 03 | 18  | 25073 44 | 28  | 23834 87 | 38   | 31640 04   |
| 9   | 50411 08 | 19  | 26218 57 | 29  | 25926 26 | 39   | 32171 30   |
| 10  | 52826 95 | 20  | 27563 03 | 30  | 28471 40 | 1—39 | 1287031.54 |

De inhouden dezer 39 driehoekjes bij elkander geteld, verkrijgt men voor hunne som den gevraagden inhoud van

$$PBC_0 = 1,286,031'54 \square \text{ minuten.}$$

De vorm der formule (26) geeft wel aanleiding, om den inhoud van een bolvormig segment als eene volkomen ontwikkelbare oppervlakte op een plat vlak over te brengen. Immers zij bestaat uit

twee factoren  $1^{\circ} . 2\pi R \times \frac{\angle C_0 P C_1}{360}$ , dat is, een gedeelte van den

omtrek van den grooten cirkel van den bol, en  $2^{\circ} . R \text{ Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1)$ , dat is de sinusversus van den boog van het segment; en daar deze beide factoren zich in dezelfde eenheid laten uitdrukken, zoo zal de oppervlakte van elk bolvormig segment kunnen voorgesteld worden door een op schaal geteekenden platten rechthoek. Alle onze 39 bolvormige segmenten zullen dan zoovele rechthoeken kunnen voorstellen, met den eersten factor als grondlijnen of abcissen en met den tweeden als opstaande zijden of ordinaten; en wanneer wij nu al die grondlijnen naast elkander op eene rechte lijn plaatsen, en dus ook de rechthoeken, die ook verschillende hoogten hebben, dan zal de fig. 5 den geheelen inhoud  $PBC_0$ , op een plat vlak ontwikkeld, voorstellen. De geheele basis van de aldus ontstane figuur zal dan,  $R$  weder in minuten uitdrukkende, gelijk zijn aan  $2\pi R \times \frac{\angle PBC_0}{360} = 2\pi \times 3437'.74677 \times \frac{89^{\circ}5'7''}{360}$  (tabel G) =  $5345'12$ ,

de hoogte van den eersten rechthoek  $= R \times \text{Sino } 26^{\circ}4'55''.7 = 3437'.74677 \times 0.101825 = 349'963$ ; en die van den laatsten  $= 3437'.74677 \times 0.047316 = 161'610$ . Nemen wij nu, om de figuur te teekenen, bijv. voor iedere 1000' van de basis eene lengte van 25 mm., en, ten einde de kromte der lijn beter te doen uitkomen, voor iedere 100' der hoogte eene lengte van 50 mm, dan ontstaat figuur 5, waarin al de 39 segmenten afgekort, om ruimte te winnen, naast elkander voorkomen.

## 2°. De strooken verdeeld in segmenten en driehoekjes.

Wanneer wij in elke strook  $C_0 P C_1$  uit de pool  $P$  met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een cirkelboogje beschrijven, die de langste zijde  $PC_1$  in  $C'$  ontmoet, dan verdeelen wij die allen in segmenten met hunne kleinste zijden tot boog, en in een driehoekje  $C_0 C_1 C'$ . De inhouden van de achtereenvolgende segmenten worden dan op de zoo even aangewezen manier, doch met de kleinste zijde als boog, nauwkeurig gevonden; doch de inhouden der driehoekjes, — daar voor deze geene formule op den bol te vinden is, en zij dus ook niet volkomen op een plat vlak kunnen worden uitgelegd —, moeten door benadering gevonden worden.

Berekenen wij eerst de inhouden der segmenten. Hiertoe moeten wij nemen de sinus-versussen der kleinste bogen van elken driehoek,



welker waarden in de laatste kolom van tabel H gevonden worden. De berekening geschiedt weder volgens formule (26<sup>b</sup>).

*Tabel L. Inhouden der bolvormige segmenten.*

| N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.    |
|------------------|----------|------------------|----------|------------------|----------|------------------|------------|
| 1                | 42912'99 | 11               | 54817'04 | 21               | 28757'11 | 31               | 31954'57   |
| 2                | 43021 37 | 12               | 58436 57 | 22               | 30606 47 | 32               | 37899 28   |
| 3                | 43313 16 | 13               | 20860 24 | 23               | 32943 68 | 33               | 48830 72   |
| 4                | 43779 58 | 14               | 21480 97 | 24               | 35763 03 | 34               | 12292 25   |
| 5                | 44441 34 | 15               | 22179 57 | 25               | 19278 30 | 35               | 13877 17   |
| 6                | 45323 52 | 16               | 22951 80 | 26               | 20435 07 | 36               | 16236 77   |
| 7                | 46466 72 | 17               | 23809 33 | 27               | 21869 67 | 37               | 20283 60   |
| 8                | 47896 83 | 18               | 24784 90 | 28               | 23587 18 | 38               | 31530 35   |
| 9                | 49697 42 | 19               | 25897 99 | 29               | 25645 81 | 39               | 32114 86   |
| 10               | 51947 07 | 20               | 27211 00 | 30               | 28142 56 | 1-39             | 1273282.86 |

*Berekening van de inhouden der driehoekjes.*

Leggen wij zooveel doenlijk de overgeblevene driehoekjes op een plat vlak neêr, dan zullen zij, dewijl de zijden der segmenten loodrecht op hunne basissen staan, ook rechthoekige driehoekjes moeten vormen, wier basissen, ontwikkeld, gelijk zijn aan den boog van den kleinen cirkel, die ook de bogen der segmenten vormt, en wier hoogten, mede ontwikkeld, gelijk zijn aan het verschil der zijden van iedere strook of segment; derhalve hunnen

$$\text{Inhoud} = (\angle C_0 PC_1 \times \sin PC_1) \times \frac{1}{2} (PC_0 - PC_1).$$

Voor de inhouden dezer driehoekjes, als zoodanig beschouwd, vinden wij in tabel M de volgende waarden.

*Tabel M. Inhoud der rechthoekige driehoekjes.*

| N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. |
|------------------|---------|------------------|---------|------------------|---------|------------------|---------|
| 1                | 30'01   | 11               | 1092'23 | 21               | 411'14  | 21               | 379'60  |
| 2                | 88 24   | 12               | 1368 30 | 22               | 460 42  | 32               | 478 21  |
| 3                | 150 45  | 13               | 180 95  | 23               | 533 10  | 33               | 654 37  |
| 4                | 217.00  | 14               | 197 35  | 24               | 623 57  | 34               | 33 99   |
| 5                | 289 50  | 15               | 216 03  | 25               | 174 44  | 35               | 39 56   |
| 6                | 370 46  | 16               | 237 44  | 26               | 193 33  | 36               | 48 19   |
| 7                | 464 31  | 17               | 260 21  | 27               | 217 75  | 37               | 62 48   |
| 8                | 575 43  | 18               | 287 67  | 28               | 246 69  | 38               | 109 35  |
| 9                | 709 93  | 19               | 319 55  | 29               | 280 01  | 39               | 56 19   |
| 10               | 876 11  | 20               | 350 76  | 30               | 317 25  | 1-39             | 136.02  |

De voorgaande berekening van de inhouden der driehoekjes, als plat en rechthoekig beschouwd, mogen wij niet als nauwkeurig genoeg houden, dewijl wij daardoor van de onderstelling zijn uitgegaan, dat hunne schuine zijden rechte lijnen zijn. De loop der kromme lijn van figuur 5 doet immers zien, dat wij die onderstelling, vooral niet bij het begin en het einde der kromme mogen aannemen, maar dat wij de schuine lijnen der driehoekjes moeten vervangen door kromme lijnen. Wij komen alzoo tot het vraagstuk om den inhoud eener vlakke kromme lijn bij benadering te vinden.

Zooals men weet, beschouwt men voor dat doel, de kromme als eene parabool van hoogere macht, en neemt men tot gemak der berekening alle opvolgende abcissenverschillen aan elkander gelijk; voor welke abcissen dan de ordinaten der kromme moeten bekend zijn. Alvorens wij dus tot de inhoudvinding van onze driehoekjes kunnen overgaan, is het allereerst noodig, dat wij de waarden van de hoeken  $P$  of der deelen van de basis van ieder der segmenten afzonderlijk even groot maken, en daarna voor elk dier abcissen de overeenkomstige waarden der ordinaten berekenen.

Deze bewerking geeft de gelegenheid aan de hand om de nauwkeurigheid der inhoudsvinding binnen veel engere grenzen te brengen dan wij tot hertoe gedaan hebben, dewijl daardoor het aantal deelen, waarin elke basis verdeeld wordt, meer en meer vergroot wordt. Het komt ons voor, dat wij ons doel, eenen genoegzamen graad van nauwkeurigheid, zullen bereiken, wanneer wij ons voor de verdeeling bepalen tot iedere  $10'$  boogs van  $\phi$ , alzoo dat elk der bogen van  $0$  tot  $1^\circ$ , van  $1-2^\circ \dots$  en van  $11$  tot  $12^\circ$  nog in zes; en de bogen  $12^\circ$  tot  $12^\circ 20'$ , enz.  $\dots$  en van  $15^\circ 40'$  tot  $16^\circ$  nog in twee gelijke deelen worden verdeeld; door welke onderverdeeling onze kromme lijn van figuur 5, in 112 punten verdeeld wordt. Ware  $PC$  in functie van  $P$  gegeven, dan zou het eenvoudiger geweest zijn, de hoeken  $P$  van ieder der hierboven genoemde driehoeken in 6 of in 2 gelijke deelen te verdeelen, en voor die tusschenwaarden de  $PC$  of de ordinaten volgens de alsdan bestaande formule te berekenen. Nu echter kunnen wij niet anders dan  $\phi$  met de nieuwe waarden van  $\phi$  die grootheden  $P$  en  $PC$  volgens formule  $20^\circ$  onmiddellijk berekenen,  $\phi$  die door interpolatiën vinden. Wij hebben de laatste bewerking als de eenvoudigste verkozen, en zoeken, uit de gegevens van tabel  $G$ , de tusschenwaarden van  $P$  en  $PC$ , door eerst in de helft, en later in drieën te interpoleeren. Wij vinden dan

Het tweede gedeelte  $N$  is gelijk de beide volgende

$$\begin{aligned} \int N d\phi &= \int \sqrt{r^2 - \rho^2 - a^2 \cos 2\phi + 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}} d\phi - \\ &- \int \frac{1}{2} \{ \rho^2 + a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi} \} \times \\ &\times \sqrt{r^2 - \rho^2 - a^2 \cos 2\phi + 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}} d\phi. \end{aligned}$$

Stellen wij, in plaats van den wortelvorm

$$\sqrt{1-p} = 1 - \frac{p}{2} - \frac{p^2}{8} - \frac{p^3}{16} - \dots, \dots (19^a)$$

dan komt er

$$\begin{aligned} (N_1) + \sqrt{r^2 - \rho^2} \int &\left\{ 1 - \frac{a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}}{2(r^2 - \rho^2)} - \right. \\ &- \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^2}{8(r^2 - \rho^2)^2} - \\ &- \left. \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^3}{16(r^2 - \rho^2)^3} \right\} d\phi - \\ &- \int \frac{1}{2} (\rho^2 + a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}) \times \\ &\times \sqrt{r^2 - \rho^2} \left\{ 1 - \frac{a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}}{2(r^2 - \rho^2)} - \right. \\ &- \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^2}{8(r^2 - \rho^2)^2} - \\ &- \left. \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^3}{16(r^2 - \rho^2)^3} \right\} d\phi. \end{aligned}$$

Het oplossen dezer integraalformule zou neerkomen op het berekenen van 33 nog al vrij samengestelde termen, onder verwaarloozing van de vierde en hoogere machten der reeks, waarin  $\sqrt{1-p}$  (19<sup>a</sup>) ontwikkeld is.

Heeft men de waarde van  $r \int \cos \beta d\phi$  gevonden, dan moet die nog door  $r$  gedeeld en dat quotient van  $\phi$  worden afgetrokken, om den inhoud te verkrijgen van het driehoekig stuk  $SC_0B$  (fig. 4).

Wij willen nu gaan onderzoeken, of deze integraalformule toegepast kan worden, 1<sup>o</sup> in het algemeen, of 2<sup>o</sup> in het bijzonder voor ons geval.

Voor eene algemeene toepasselijkheid moeten in de eerste plaats de coëfficiënten der onderscheidene termen kleiner en kleiner worden, hoe meer termen men van  $\sqrt{1-p}$  (19<sup>a</sup>) neemt. Wij zien dade-

lijk, dat bijna al de termen zijn aangedaan door een coëfficiënt van den vorm  $\frac{a^n \rho^n}{(r^2 - \rho^2)^n}$ : en het zal dus hoofdzakelijk van de waarde van  $(r^2 - \rho^2)$  afhangen, of de reeks al dan niet convergeert. En al dadelijk zien wij in, dat daar  $r$  en  $\rho$  bijna aan elkander gelijk kunnen zijn,  $(r^2 - \rho^2)^n$  eene zeer kleine grootheid worden kan, en dus de breuk  $\frac{a^n \rho^n}{(r^2 - \rho^2)^n}$  in diezelfde en boven mate zal vergroot worden.

Stellen wij b. v.  $r = 1000''$  en  $\rho = 999''$  of  $r = 0.0048481368$   $\rho = 0.0048432886$  voor den straal  $= 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{dan is} \quad (r^2 - \rho^2)^1 &= 0.0000.0004.6992, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} &= 0.0002.1677.0850, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{4}} &= 0.01019, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{8}} &= 0.018.4787, \\ &\text{enz.} \end{aligned}$$

Daar nu de tellers der breuken,  $a$  en  $\rho$  standvastig blijvende, bij elke benadering hoogstens een tweede macht hoger klimmen, zoo zal deze integraalformule in het algemeen des te minder convergeren en zelfs divergeren, naarmate meer benaderingen aangewend worden.

Of nu de integraalformule ook in ons geval, namelijk voor  $r = 1000''$ ,  $\rho = 900''$  en  $a = 1800''$ , nog bruikbaar is, willen wij alleen wijzen op het toenemen van coëfficiënten der termen, die van de termen  $\frac{p^3}{8}$  en  $\frac{p^3}{16}$  en van de hoogere machten van  $\sqrt{1-p}$  afhangen, die wij niet noodig gevonden hebben verder te ontwikkelen.

Er doet zich tot eene algemeene toepassing dezer integraalformule, of beter gezegd tot het vinden van den inhoud van driehoek  $SO_0B$ , bovendien nog eene andere zwaarigheid op. In fig. 3 is namelijk de stand der schijven van zon en maan zóó voorgesteld, dat de boog  $C_0B$  door alle bogen  $SC$  slechts in één punt gesneden wordt; in die gevallen, maar ook in die alleen, mag men stellen

$$TC_0B = TSB - C_0SB \dots\dots\dots (18)$$

Dit heeft echter niet altijd plaats, want, wanneer de middelpunten van zon en maan zich meer en meer naderen tot dat de maansrand bijna op het middelpunt der zon valt, dan komen daaronder standen voor, waarin enkele bogen  $C_0C$  den boog  $C_0B$  in twee

punten zullen snijden; en dan zou het hoogst moeilijk zijn, den inhoud van  $SC_0B$ , op wat manier ook, te bepalen.

Om alle welke redenen wij het vinden van den inhoud  $SC_0B$  door middel eener integraalformule hebben moeten opgeven.

*C. Voorbereidende berekening tot het vinden van den inhoud der bedekte oppervlakte.*

Nu geene der aangewende methoden van integratie ons hebben geleid tot het vinden van den bewusten inhoud, bleef ons niets anders over dan de bepaling van dien inhoud door verdeeling der oppervlakte in driehoekjes. Tevens moesten wij eene methode aanwenden die voor alle gevallen, die in het vraagstuk kunnen voorkomen, aanwendbaar was.

Deze methode bestond daarin, dat wij eene oppervlakte berekenen, die niet zooals de driehoek  $C_0SC$  somtijds onmogelijk te berekenen was, maar een driehoek, die bij alle afstanden der middelpunten berekend konde worden; en deze is de driehoek  $TC_0B$ , dezelfde driehoek, wiens inhoud wij kennen moeten.

Tot dat einde hebben wij den hoek  $ST$  (fig. 4) tot  $90^\circ$  in  $P$  verlengd, en door  $P$  en  $B$  een boog  $PB$  van een grooten cirkel getrokken. Alsdan is inhoud

$$TC_0B = PC_0B - PTB = PC_0B - (PSB - TSB) \dots (19)$$

Dewijl nu de hoek  $C_0PB$  blijkbaar eene functie van twee der elementen  $\phi$  en  $\beta$  van den driehoek  $SC_0B$  moet zijn, en wij de laatste oppervlakte te bezwarend gevonden hebben om te integreeren, zoo kan er des te minder sprake zijn van eene integratie der oppervlakte  $PC_0B$ , en schiet er dus ten laatste niets anders over dan deze in een aantal driehoekjes te verdeelen, en van ieder dezer driehoekjes den inhoud te zoeken. Daartoe brengen wij door alle punten  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  en de pool  $P$ , bogen van groote cirkels, die daardoor de oppervlakte  $PC_0B$  in even zoo vele driehoekjes verdeelen, wier twee zijden bogen van groote cirkels, en de derde zijden deelen, uitmaken van de kromme  $C_0B$  van doorsnijding.

Om de elementen van deze driehoeken, waardoor hunne inhouden bepaald kunnen worden, te vinden, moeten wij eerst bekend hebben de hoeken  $P$  en de zijden  $PC$  van elken driehoek  $C_1PC_2$ , enz.; deze grootheden worden op de volgende wijze gevonden.

In elk der driehoeken  $SPC$  zijn gegeven  $SP = 90^\circ$ ,  $SC = \beta$  uit tabel  $B$ , en de ingesloten hoek  $PSC = \phi$ ; de waarde van  $\beta$  is

daarbij eene functie van  $SC$  in  $\phi$  (tabel F). Door deze gegevens worden de onbekende grootheden  $P$  en  $PC$  door een der beide volgende stellen formules berekend.

Laat men uit eenig punt  $C$ , fig. 4, een loodrechten boog  $CD$  op de basis  $SP$  neêr, die deze in het punt  $D$  in twee stukken  $SD = \gamma$  en  $PD = 90^\circ - \gamma$  snijdt, dan heeft men

$$Tg SD = Tg SC \cdot Cos S,$$

$$Sin SD : Sin PD = Cot S : Cot P,$$

en

$$Cos SD : Cos PD = Cos SC : Cos PC,$$

of wel

$$Tg \gamma = Tg \beta \cdot Cos \phi,$$

$$\left. \begin{aligned} Sin \gamma : Sin(90^\circ - \gamma) &= Cot \phi : Cot P \quad \text{of} \quad Cot P = Cot \gamma \cdot Cot \phi, \\ Cos \gamma : Cos(90^\circ - \gamma) &= Cos \beta : Cos PC \quad \text{of} \quad Cos PC = Tg \gamma \cdot Cos \beta. \end{aligned} \right\} (20)$$

Brengt men de waarde van  $Tg \gamma = Tg \beta \cdot Cos \phi$  in de beide laatste over, dan komt er

$$Cot P = \frac{Cot \beta}{Sin \phi} \quad \text{en} \quad Cos PC = Sin \beta \cdot Cos \phi; \dots (20^a)$$

of wel, met behulp der Neperiaansche analogiën,

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2}(C + P) &= \frac{Cos \frac{1}{2}(SP - SC)}{Cos \frac{1}{2}(SP + SC)} \cdot Cot \frac{1}{2} S, \\ Tg \frac{1}{2}(C - P) &= \frac{Sin \frac{1}{2}(SP - SC)}{Sin \frac{1}{2}(SP + SC)} \cdot Cot \frac{1}{2} S, \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

$$\text{en} \quad Tg \frac{1}{2} PC = Tg \frac{1}{2}(SP + SC) \frac{Cos \frac{1}{2}(C + P)}{Cos \frac{1}{2}(C - P)} = Tg \frac{1}{2}(SP - SC) \frac{Sin \frac{1}{2}(C + P)}{Sin \frac{1}{2}(C - P)},$$

of in plaats van deze laatste

$$Sin PC = \frac{Sin \phi}{Sin P} Sin SC.$$

Deze laatste formules ondergaan, door  $SP = 90^\circ$  daarin over te brengen, de volgende vereenvoudigingen

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2}(C + P) &= Tg \frac{1}{2}(90^\circ + \beta) \cdot Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2}(P - C) &= Cotg \frac{1}{2}(90^\circ + \beta) \cdot Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2} PC &= Cot \frac{1}{2}(90^\circ + \beta) \frac{Cos \frac{1}{2}(C + P)}{Cos \frac{1}{2}(C - P)}. \end{aligned} \right\} \dots (21^a)$$

De berekeningen volgens het eerste stel formules (20<sup>a</sup>) loopen spoediger af; zij volgen hier voor eenige waarden van  $\phi$ .

| $\phi =$               | 1°        | 6°         | 12°        | 15°        | 17°        | 17°40'     |
|------------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\beta =$              | 63°56'42" | 65°15'25"  | 70°9'24"   | 75°20'27"  | 82°8'26"   | 88°48'12"  |
| <i>Log Cot</i> $\beta$ | 9.6892390 | 9.6635684  | 9.5573588  | 9.4176104  | 9.1400052  | 8.3491597  |
| <i>Log Sin</i> $\phi$  | 8.2418553 | 9.0192346  | 9.3178789  | 9.4129962  | 9.4659353  | 9.4821283  |
| <i>Log Cot</i> P       | 1.4473837 | 0.6443338  | 0.2394799  | 0.0046142  | 9.6740699  | 8.8670314  |
| P =                    | 2°2'39"9  | 12°46'49"0 | 29°56'51"0 | 44°41'44"3 | 64°43'34"3 | 85°47'20"9 |
| <i>Log Sin</i> $\beta$ | 9.9534565 | 9.9581786  | 9.9734162  | 9.9856278  | 9.9959011  | 9.9998916  |
| <i>Log Cos</i> $\phi$  | 9.9999338 | 9.9976143  | 9.9904044  | 9.9849438  | 9.9805963  | 9.9790192  |
| <i>Cos</i> PC          | 9.9533903 | 9.9557929  | 9.9638206  | 9.9705716  | 9.9764974  | 9.9789108  |
| PC =                   | 26°4'22"4 | 25°24'56"1 | 23°3'49"4  | 20°51'18"8 | 18°40'48"3 | 17°42'41"4 |

De overige waarden van P en PC worden in tabel G gevonden.

De gevondene waarden voor den hoek P en de zijde PC<sub>n</sub> van iederen bolvormigen driehoek PC<sub>n-1</sub>P<sub>n</sub> kunnen, dewijl in ieder van deze twee zijden PC<sub>n-1</sub> en PC<sub>n</sub> en de ingesloten hoek P<sub>n</sub>-P<sub>n-1</sub> bekend zijn, gebruikt worden om den inhoud van ieder dezer driehoeken, door middel van hunne spherische excessen, te berekenen.

Het is namelijk uit de bolvormige driehoeksmeting bekend, dat de inhoud van iederen bolvormigen driehoek tot dien van het spherisch octant dezelfde verhouding heeft als zijn spherisch exces tot een rechten hoek. Stelt I den inhoud van een bolvormigen driehoek,  $\Delta$  dien van het spherisch octant, en  $\varepsilon$  het spherisch exces voor, dan is

$$I : \Delta = \varepsilon : 90^\circ, \text{ of } I = \frac{90}{\varepsilon} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

of, wel, wanneer A, B, C de hoeken van den driehoek beteekenen

$$I = \frac{(A + B + C) - 180^\circ}{90^\circ} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

Het spherisch exces  $\varepsilon$ , dat onmiddellijk van de grootte der hoeken eens bolvormigen driehoeks afhangt, zal dus gevonden worden, wanneer men 180° van de som der hoeken aftrekt. Zijn de gegevens van een driehoek andere dan de drie hoeken, in ons geval twee zijden en de ingesloten hoek, dan vindt men  $\varepsilon$  door de formule

$$\cot \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cdot \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C},$$

$$\text{welke, door te stellen } \frac{\cot \frac{1}{2} a \cdot \cot \frac{1}{2} b}{\cos C} = Tg^2 \mu,$$

tot dezen, beter voor de berekening geschikt, vorm wordt omgezet

$$Tg \frac{1}{2} \epsilon = Tg C \cos^2 \mu \dots \dots \dots (24)$$

Hoewel deze formule eenvoudig genoeg voor de bewerking is, geven wij toch aan de eerste de voorkeur, namelijk, aan het berekenen der beide overige hoeken van den driehoek. Daartoe hebben wij niets anders noodig dan de som der beide overige hoeken, en kunnen wij volstaan met de berekening van de eerste formule der Neperiaansche analogiën

$$Tg \frac{1}{2} (C_{n-1} + C_n) = \frac{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} - PC_n)}{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} + PC_n)} \cot \frac{1}{2} (P_n - P_{n-1}) \dots (25)$$

Wanneer wij de waarden van SC uit tabel F, voor waarden van  $\phi$  van 10 tot 10' wilden interpoleeren, en voor deze in tabel E de overeenkomstige waarden van  $\beta$  zoeken, en verder, voor al die waarden van  $\phi$ , P en PC uit tabel G interpoleren, dan zouden wij de geheele bedekte oppervlakte der zon in 112 bolvormige driehoeken verdeelen.

Het komt ons echter voor, dat de nauwkeurigheid ver genoeg voortgezet zal zijn, zoo wij ons voor de berekening van den inhoud bepalen tot de waarden van  $\phi$ , in tabel F aangenomen, in welk geval er nog 39 bolvormige driehoeken te berekenen zijn; welker inhoud dan wellicht met minder moeite tot elken gewenschten graad van nauwkeurigheid kunnen geïnterpoleerd worden.

Deze laatste verdeling in 39 driehoeken behoudende, zoeken wij eerst de elementen derzelfde uit tabel G, welke wij in tabel H mededeelen, om dan daarmede met behulp der formule (25), de halve som der onbekende hoeken te berekenen. Tabel H bevat nog in hare laatste kolommen de sinus-versussen zoowel der enkele zijden als die van hunne gemiddelde waarden, welke wij later noodig zullen hebben.

Ziehier de berekening van het spherisch excess  $\epsilon$ .

| Driehoek N <sup>o</sup> .                        | 1            | 7              | 13             | 22             | 31             | 39             |
|--------------------------------------------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\frac{1}{2} (PC_0 - PC_1) =$                    | 0° 0' 33" 4  | 0° 7' 41" 4    | 0° 6' 1" 8     | 0° 9' 22" 6    | 0° 6' 38" 2    | 0° 0' 59" 7    |
| $\frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) =$                    | 26 4 55 7    | 25 17 15 8     | 22 57 47 7     | 20 41 56 5     | 18 34 10 2     | 17 41 44 7     |
| $\frac{1}{2} (P_1 - P_0) =$                      | 1 1 20 0     | 1 11 14 3      | 0 38 37 2      | 1 10 0 2       | 1 30 20 1      | 1 38 53 5      |
| <i>Log Cos <math>\frac{1}{2}</math> verschil</i> | 0.0000000    | 9.9999989      | 9.9999993      | 9.9999984      | 9.9999992      | 0.0000000      |
| <i>Log Sec <math>\frac{1}{2}</math> som</i>      | 0.0466482    | 0.0437499      | 0.0358558      | 0.0289794      | 0.0232199      | 0.0210511      |
| <i>Log Cot <math>\frac{1}{2}</math> P =</i>      | 1.7485312    | 1.6834981      | 1.9494433      | 1.6910949      | 1.5803179      | 1.5409946      |
|                                                  | 1.7951744    | 1.7272469      | 1.9852984      | 1.7200727      | 1.6035370      | 1.5620457      |
| $\frac{1}{2} (C + C) =$                          | 89° 4' 54.68 | 88° 55' 35" 18 | 89° 24' 26" 53 | 88° 54' 30" 84 | 88° 34' 21" 95 | 88° 25' 47" 10 |
| $\frac{1}{2} P =$                                | 1 1 20.00    | 1 11 14 30     | 0 38 37 20     | 1 30 0 20      | 1 30 20 10     | 1 38 53 50     |
| $90^\circ + \frac{1}{2} \epsilon =$              | 90 6 14 68   | 90 6 49 48     | 90 3 3 73      | 90 4 31 04     | 90 4 42 05     | 90 4 40 60     |
| $\epsilon$                                       | 12' 29" 36   | 13' 38" 96     | 6' 7" 46       | 9' 2" 08       | 9' 24" 10      | 9' 21" 20      |



Door op deze wijze de bewerkingen voort te zetten hebben wij de spherische excessen van al de 39 driehoeken verkregen.

Tabel I. *Spherische excessen der 39 bolvormige driehoeken.*

| n <sup>o</sup> . | ε           | n <sup>o</sup> . | ε           | n <sup>o</sup> . | ε         | n <sup>o</sup> . | ε          | n <sup>o</sup> . | ε            |
|------------------|-------------|------------------|-------------|------------------|-----------|------------------|------------|------------------|--------------|
| 1                | 12° 29' 36" | 9                | 14° 47' 24" | 17               | 7' 0" 00" | 25               | 5° 39' 60" | 33               | 14° 20' 80"  |
| 2                | 12 32 78    | 10               | 15 21 50    | 18               | 7 17 56   | 26               | 6 0 04     | 34               | 3 35 08      |
| 3                | 12 38 26    | 11               | 16 15 30    | 19               | 7 37 52   | 27               | 6 28 18    | 35               | 4 2 80       |
| 4                | 12 47 80    | 12               | 17 23 22    | 20               | 8 0 98    | 28               | 6 55 86    | 36               | 4 45 46      |
| 5                | 12 58 58    | 13               | 6 7 46      | 21               | 8 28 86   | 29               | 7 32 36    | 37               | 5 55 06      |
| 6                | 13 17 40    | 14               | 6 18 26     | 22               | 9 2 08    | 30               | 8 18 54    | 38               | 9 11 86      |
| 7                | 13 38 96    | 15               | 6 30 78     | 23               | 9 44 14   | 31               | 9 24 10    | 39               | 9 21 20      |
| 8                | 14 5 84     | 16               | 6 45 00     | 24               | 10 32 58  | 32               | 11 9 42    | 1-39             | 374° 21' 82" |

D. *Berekening van den inhoud van het bedekte gedeelte der zon en zijne verhouding tot de geheele zichtbare oppervlakte voor den aangenomen afstand der middelpunten.*

Zoals wij reeds hebben opgemerkt, is het halve bedekte gedeelte der zon  $TBC_0T$ , fig. 4, ingesloten door een boog van een grooten cirkel  $C_0T$ , door een boog van een kleinen cirkel  $TB$ , en door eene spherische lijn  $C_0B$ , de doorsnede van het kegelvlak der maan met de oppervlakte der zon, — van welke kromme wij de vergelijking niet kennen, maar die wij aanvankelijk door 39 bogen van groote cirkels hebben vervangen. Dit bedekte gedeelte maakt een deel uit van de oppervlakte  $PBC_0P$ , welke wij in bolvormige driehoeken hebben verdeeld, en verschilt daarvan de oppervlakte van den bijgevoegden driehoek  $PBT$ . De laatstgenoemde driehoek is wederom gelijk aan het verschil van den zuiveren bolvormigen driehoek  $PBS$ , en het bolvormig segment  $BST$ , zoodat wij hebben

$$Inh. TBC_0 = Inh. PBC_0 - (Inh. PBS - Inh. TBS).$$

Dewijl nu  $PBS$  en  $TBS$  nauwkeurig uit de gegevens kunnen berekend worden, zoo zullen wij ons eerst bezig houden met het vinden van den inhoud  $PBC_0$ .

Genoemde inhoud kan nu op verschillende wijzen bepaald worden, naar gelang men voor de lijntjes, die de deelpunten  $C_0, C_1, C_2, \dots B$  onderling verbinden, den een of anderen vorm meent te mogen aannemen.

In de eerste plaats kan men de strooken, waarin wij de oppervlakte verdeeld hebben, beschouwen als zoovele bolvormige segmenten, waarvan de hoeken aan de pool gelijk zijn aan de in tabel H gevondene hoeken  $P$ , en waarvan de boog het gemiddelde der zijden  $PC_0$  en  $PC_1$ ,  $PC_1$  en  $PC_2$ , enz. bedraagt; alsdan neemt men voor de verbindingslijntjes  $C_0C_1$  enz. kleine cirkels aan.

Ten anderen kunnen wij elke strook  $PC_0C_1$  verdeelen in een segment  $PC_0C'$ , dat ontstaat, wanneer men uit  $P$  met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een boog beschrijft, die de grootste zijde  $PC_1$  in  $C'$  snijdt, en in een driehoekje  $C_0C'C_1$ , hetwelk dan op een plat vlak moet worden overgebracht.

Dat driehoekje zal rechthoekig zijn, en zijn inhoud kan gevonden worden, hetzij men zijne schuine zijde, ontwikkeld zijnde, als eene rechte lijn, hetzij als eene parabolische kromme van hoogere orde beschouwt.

Ten derde, wanneer de boogjes  $C_0C_1$ , enz. als bogen van groote cirkels worden aangenomen, alsdan moeten alle strooken als bolvormige driehoeken behandeld worden.

1°. *De strooken beschouwd als segmenten met gemiddelde zijden tot boog.*

Noemen wij  $I$  den inhoud van het bolvormig segment, en  $R$  den straal van den bol, dan is

$$I = 2\pi R \times R \text{ Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \times \frac{LC_0PC_1}{360^\circ} =$$

$$= \pi R^2 \times \frac{LC_0PC_1}{180^\circ} \times \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \dots (26)$$

Ten einde aan de eene zijde te groote getallen, en aan de andere zijde te veel nullen achter het decimaalteeken te vermijden, nemen wij de minuut als eenheid aan; zoodat  $R = 3437'74677$  moet genomen worden. Hierdoor verandert de laatste formule in de volgende

$$I = \frac{\pi}{180^\circ} \times (3437'74677)^2 \times LC_0PC_1 \times \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \quad (26')$$

of, de factor in logarithmen overgebracht en de hoeken  $C_0PC$  en  $180^\circ$ , in seconden uitgedrukt, verkrijgt men

|                                  |                        |                    |
|----------------------------------|------------------------|--------------------|
| $2 \text{ Log } R$               | $= 2 \times 3.5362739$ | $= 7.0725478$      |
| $\text{Log } \pi$                |                        | $= 0.4971499$      |
| $\text{Colog } 180 \times 360''$ |                        | $= 4.1984250 - 10$ |
| $\text{Log coefficient}$         |                        | $= 1.7581227$      |

dus 
$$\text{Log } I = 1.7581227 + \text{Log Sinvers } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) + \text{Log } \angle C_0 PC_1 \text{ (in seconden) } \dots \dots \dots (26')$$

In tabel H worden in de kolom met  $P_1 - P_0$  aan het hoofd de waarden der hoeken  $C_0 PC_1$ , en in de vóórlaatste kolom de sinversussen van  $\frac{1}{2} (PC_0 + PC_1)$  opgegeven. De berekening van  $I$  gaat nu gemakkelijk en aldus

| N <sup>o</sup> .                             | 1         | 7         | 13        | 22        | 31        |
|----------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\angle C_0 PC_1$                            | 7359'9    | 8548'6    | 4634'3    | 8400'3    | 10840'1   |
| $\text{Log } C_0 PC_1$                       | 3.8668719 | 3.9318950 | 3.6659841 | 3.9242948 | 4.0350333 |
| $\text{Log Sinv } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1)$ | 9.0078971 | 8.9814834 | 8.8989664 | 8.8098962 | 8.7165208 |
| $\text{Log Sinv coëfficiënt}$                | 1.7581227 | 1.7581227 | 1.7581229 | 1.7581227 | 1.7581227 |
| $\text{Log } I$                              | 4.6328917 | 4.6715011 | 4.3230734 | 4.4923137 | 4.5096768 |
| $I =$                                        | 42942.93  | 46935.47  | 21041.33  | 31068.03  | 32335.20  |

Op deze wijze zijn de inhouden van alle 39 bolvormige segmenten berekend, waarvan de uitkomsten in de volgende tabel K gevonden worden.

Tabel K. *Inhouden der bolvormige segmenten.*

| N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.    |
|------------------|----------|------------------|----------|------------------|----------|------------------|------------|
| 1                | 42942'93 | 11               | 55912'16 | 21               | 29169'70 | 31               | 32335'29   |
| 2                | 43109 24 | 12               | 59813 24 | 22               | 31068 03 | 32               | 38378 92   |
| 3                | 43459 15 | 13               | 21041 33 | 23               | 33480 26 | 33               | 49486 37   |
| 4                | 43997 03 | 14               | 21678 70 | 24               | 36389 43 | 34               | 12325 65   |
| 5                | 44748 10 | 15               | 22396 22 | 25               | 19454 84 | 35               | 13920 00   |
| 6                | 45699 92 | 16               | 23189 98 | 26               | 20629 30 | 36               | 16289 86   |
| 7                | 46935 47 | 17               | 24070 00 | 27               | 22087 57 | 37               | 20346 88   |
| 8                | 48539 03 | 18               | 25073 44 | 28               | 23834 87 | 38               | 31640 04   |
| 9                | 50411 08 | 19               | 26218 57 | 29               | 25926 26 | 39               | 32171 30   |
| 10               | 52826 95 | 20               | 27563 03 | 30               | 28471 40 | 1—39             | 1287031.54 |

De inhouden dezer 39 driehoekjes bij elkander geteld, verkrijgt men voor hunne som den gevraagden inhoud van

$$PBC_0 = 1,286,031'54 \square \text{ minuten.}$$

De vorm der formule (26) geeft wel aanleiding, om den inhoud van een bolvormig segment als eene volkomen ontwikkelbare oppervlakte op een plat vlak over te brengen. Immers zij bestaat uit

twee factoren  $1^\circ. 2\pi R \times \frac{\angle C_0 PC_1}{360}$ , dat is, een gedeelte van den

omtrek van den grooten cirkel van den bol, en  $2^\circ. R \text{ Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1)$ , dat is de sinusversus van den boog van het segment; en daar deze beide factoren zich in dezelfde eenheid laten uitdrukken, zoo zal de oppervlakte van elk bolvormig segment kunnen voorgesteld worden door een op schaal geteekenden platten rechthoek. Alle onze 39 bolvormige segmenten zullen dan zoovele rechthoeken kunnen voorstellen, met den eersten factor als grondlijnen of abscissen en met den tweeden als opstaande zijden of ordinaten; en wanneer wij nu al die grondlijnen naast elkander op eene rechte lijn plaatsen, en dus ook de rechthoeken, die ook verschillende hoogten hebben, dan zal de fig. 5 den geheelen inhoud  $PBC_0$ , op een plat vlak ontwikkeld, voorstellen. De geheele basis van de aldus ontstane figuur zal dan,  $R$  weder in minuten uitdrukkende, gelijk zijn aan

$$2\pi R \times \frac{\angle PBC_0}{360} = 2\pi \times 3437'.74677 \times \frac{89^\circ 5' 7''}{360} \text{ (tabel G)} = 5345'12,$$

de hoogte van den eersten rechthoek  $= R \times \text{Sinv } 26^\circ 4' 55'' 7 = 3437'.74677 \times 0.101825 = 349'963$ ; en die van den laatsten  $= 3437'.74677 \times 0.047316 = 161'610$ . Nemen wij nu, om de figuur te teekenen, bijv. voor iedere 1000' van de basis eene lengte van 25 mm., en, ten einde de kromte der lijn beter te doen uitkomen, voor iedere 100' der hoogte eene lengte van 50 mm, dan ontstaat figuur 5, waarin al de 39 segmenten afgekort, om ruimte te winnen, naast elkander voorkomen.

## 2°. De strooken verdeeld in segmenten en driehoekjes.

Wanneer wij in elke strook  $C_0 PC_1$  uit de pool  $P$  met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een cirkelboogje beschrijven, die de langste zijde  $PC_1$  in  $C'$  ontmoet, dan verdeelen wij die allen in segmenten met hunne kleinste zijden tot boog, en in een driehoekje  $C_0 C_1 C'$ . De inhouden van de achtereenvolgende segmenten worden dan op de zoo even aangewezen manier, doch met de kleinste zijde als boog, nauwkeurig gevonden; doch de inhouden der driehoekjes, — daar voor deze geene formule op den bol te vinden is, en zij dus ook niet volkomen op een plat vlak kunnen worden uitgelegd —, moeten door benadering gevonden worden.

Berekenen wij eerst de inhouden der segmenten. Hiertoe moeten wij nemen de sinus-versussen der kleinste bogen van elken driehoek,

welker waarden in de laatste kolom van tabel H gevonden worden. De berekening geschiedt weder volgens formule (26<sup>b</sup>).

*Tabel L. Inhouden der bolvormige segmenten.*

| N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.    |
|------------------|----------|------------------|----------|------------------|----------|------------------|------------|
| 1                | 42912'99 | 11               | 54817'04 | 21               | 28757'11 | 31               | 31954'57   |
| 2                | 43021 37 | 12               | 58436 57 | 22               | 30606 47 | 32               | 37899 28   |
| 3                | 43313 16 | 13               | 20860 24 | 23               | 32943 68 | 33               | 48830 72   |
| 4                | 43779 58 | 14               | 21480 97 | 24               | 35763 03 | 34               | 12292 25   |
| 5                | 44441 34 | 15               | 22179 57 | 25               | 19278 30 | 35               | 13877 17   |
| 6                | 45323 52 | 16               | 22951 80 | 26               | 20435 07 | 36               | 16236 77   |
| 7                | 46466 72 | 17               | 23809 33 | 27               | 21869 67 | 37               | 20283 60   |
| 8                | 47896 83 | 18               | 24784 90 | 28               | 23587 18 | 38               | 31530 35   |
| 9                | 49697 42 | 19               | 25897 99 | 29               | 25645 81 | 39               | 32114 86   |
| 10               | 51947 07 | 20               | 27211 00 | 30               | 28142 56 | 1-39             | 1273282.86 |

*Berekening van de inhouden der driehoekjes.*

Leggen wij zooveel doenlijk de overgeblevene driehoekjes op een plat vlak neêr, dan zullen zij, dewijl de zijden der segmenten loodrecht op hunne basissen staan, ook rechthoekige driehoekjes moeten vormen, wier basissen, ontwikkeld, gelijk zijn aan den boog van den kleinen cirkel, die ook de bogen der segmenten vormt, en wier hoogten, mede ontwikkeld, gelijk zijn aan het verschil der zijden van iedere strook of segment; derhalve hunnen

$$\text{Inhoud} = (L C_0 PC_1 \times \sin PC_1) \times \frac{1}{2} (PC_0 - PC_1).$$

Voor de inhouden dezer driehoekjes, als zoodanig beschouwd, vinden wij in tabel M de volgende waarden.

*Tabel M. Inhoud der rechthoekige driehoekjes.*

| N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. |
|------------------|---------|------------------|---------|------------------|---------|------------------|---------|
| 1                | 30'01   | 11               | 1092'23 | 21               | 411'14  | 21               | 379'60  |
| 2                | 88 24   | 12               | 1368 30 | 22               | 460 42  | 32               | 478 21  |
| 3                | 150 45  | 13               | 180 95  | 23               | 533 10  | 33               | 654 37  |
| 4                | 217.00  | 14               | 197 35  | 24               | 623 57  | 34               | 33 99   |
| 5                | 289 50  | 15               | 216 03  | 25               | 174 44  | 35               | 39 56   |
| 6                | 370 46  | 16               | 237 44  | 26               | 193 33  | 36               | 48 19   |
| 7                | 464 31  | 17               | 260 21  | 27               | 217 75  | 37               | 62 48   |
| 8                | 575 43  | 18               | 287 67  | 28               | 246 69  | 38               | 109 35  |
| 9                | 709 93  | 19               | 319 55  | 29               | 280 01  | 39               | 56 19   |
| 10               | 876 11  | 20               | 350 76  | 30               | 317 25  | 1-39             | 136.02  |

De voorgaande berekening van de inhouden der driehoekjes, als plat en rechthoekig beschouwd, mogen wij niet als nauwkeurig genoeg houden, dewijl wij daardoor van de onderstelling zijn uitgegaan, dat hunne schuine zijden rechte lijnen zijn. De loop der kromme lijn van figuur 5 doet immers zien, dat wij die onderstelling, vooral niet bij het begin en het einde der kromme mogen aannemen, maar dat wij de schuine lijnen der driehoekjes moeten vervangen door kromme lijnen. Wij komen alzoo tot het vraagstuk om den inhoud eener vlakke kromme lijn bij benadering te vinden.

Zooals men weet, beschouwt men voor dat doel, de kromme als eene parabool van hoogere macht, en neemt men tot gemak der berekening alle opvolgende abcissenverschillen aan elkander gelijk; voor welke abcissen dan de ordinaten der kromme moeten bekend zijn. Alvorens wij dus tot de inhoudvinding van onze driehoekjes kunnen overgaan, is het allereerst noodig, dat wij de waarden van de hoeken  $P$  of der deelen van de basis van ieder der segmenten afzonderlijk even groot maken, en daarna voor elk dier abcissen de overeenkomstige waarden der ordinaten berekenen.

Deze bewerking geeft de gelegenheid aan de hand om de nauwkeurigheid der inhoudsvinding binnen veel engere grenzen te brengen dan wij tot hertoe gedaan hebben, dewijl daardoor het aantal deelen, waarin elke basis verdeeld wordt, meer en meer vergroot wordt. Het komt ons voor, dat wij ons doel, eenen genoegzamen graad van nauwkeurigheid, zullen bereiken, wanneer wij ons voor de verdeling bepalen tot iedere  $10'$  boogs van  $\phi$ , alzoo dat elk der bogen van  $0$  tot  $1^\circ$ , van  $1-2^\circ \dots$  en van  $11$  tot  $12^\circ$  nog in zes; en de bogen  $12^\circ$  tot  $12^\circ 20'$ , enz.  $\dots$  en van  $15^\circ 40'$  tot  $16^\circ$  nog in twee gelijke deelen worden verdeeld; door welke onderverdeling onze kromme lijn van figuur 5, in 112 punten verdeeld wordt. Ware  $PC$  in functie van  $P$  gegeven, dan zou het eenvoudiger geweest zijn, de hoeken  $P$  van ieder der hierboven genoemde driehoeken in 6 of in 2 gelijke deelen te verdeelen, en voor die tusschenwaarden de  $PC$  of de ordinaten volgens de alsdan bestaande formule te berekenen. Nu echter kunnen wij niet anders dan of met de nieuwe waarden van  $\phi$  die grootheden  $P$  en  $PC$  volgens formule  $20^\circ$  onmiddellijk berekenen, of die door interpolatiën vinden. Wij hebben de laatste bewerking als de eenvoudigste verkozen, en zoeken, uit de gegevens van tabel  $G$ , de tusschenwaarden van  $P$  en  $PC$ , door eerst in de helft, en later in drieën te interpoleeren. Wij vinden dan

Het tweede gedeelte  $N$  is gelijk de beide volgende

$$\begin{aligned} \int N d\phi &= \int \sqrt{r^2 - \rho^2 - a^2 \cos 2\phi + 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}} d\phi - \\ &\quad - \int \frac{1}{2} \{ \rho^2 + a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi} \} \times \\ &\quad \times \sqrt{r^2 - \rho^2 - a^2 \cos 2\phi + 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}} d\phi. \end{aligned}$$

Stellen wij, in plaats van den wortelvorm

$$\sqrt{1-p} = 1 - \frac{p}{2} - \frac{p^2}{8} - \frac{p^3}{16} - \dots, \dots (19')$$

dan komt er

$$\begin{aligned} (N_1) + \sqrt{r^2 - \rho^2} \int &\left\{ 1 - \frac{a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}}{2(r^2 - \rho^2)} - \right. \\ &\quad - \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^2}{8(r^2 - \rho^2)^2} - \\ &\quad \left. - \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^3}{16(r^2 - \rho^2)^3} \right\} d\phi - \\ &\quad - \int \frac{1}{2} (\rho^2 + a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}) \times \\ &\quad \times \sqrt{r^2 - \rho^2} \left\{ 1 - \frac{a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}}{2(r^2 - \rho^2)} - \right. \\ &\quad - \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^2}{8(r^2 - \rho^2)^2} - \\ &\quad \left. - \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^3}{16(r^2 - \rho^2)^3} \right\} d\phi. \end{aligned}$$

Het oplossen dezer integraalformule zou neerkomen op het berekenen van 33 nog al vrij samengestelde termen, onder verwaarloozing van de vierde en hoogere machten der reeks, waarin  $\sqrt{1-p}$  (19') ontwikkeld is.

Heeft men de waarde van  $r \int \cos \beta d\phi$  gevonden, dan moet die nog door  $r$  gedeeld en dat quotient van  $\phi$  worden afgetrokken, om den inhoud te verkrijgen van het driehoekig stuk  $SC_0B$  (fig. 4).

Wij willen nu gaan onderzoeken, of deze integraalformule toegepast kan worden, 1° in het algemeen, of 2° in het bijzonder voor ons geval.

Voor eene algemeene toepasselijkheid moeten in de eerste plaats de coëfficiënten der onderscheidene termen kleiner en kleiner worden, hoe meer termen men van  $\sqrt{1-p}$  (19') neemt. Wij zien dade-

lijk, dat bijna al de termen zijn aangedaan door een coëfficiënt van den vorm  $\frac{a^n \rho^n}{(r^2 - \rho^2)^n}$ : en het zal dus hoofdzakelijk van de waarde van  $(r^2 - \rho^2)$  afhangen, of de reeks al dan niet convergeert. En al dadelijk zien wij in, dat daar  $r$  en  $\rho$  bijna aan elkander gelijk kunnen zijn,  $(r^2 - \rho^2)$  eene zeer kleine grootheid worden kan, en dus de breuk  $\frac{a^n \rho^n}{(r^2 - \rho^2)^n}$  in diezelfde en boven mate zal vergroot worden.

Stellen wij b. v.  $r = 1000''$  en  $\rho = 999''$  of  $r = 0.0048481368$   $\rho = 0.0048432886$  voor den straal  $= 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{dan is} \quad (r^2 - \rho^2)^1 &= 0.0000.0004.6992, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} &= 0.0002.1677.0850, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} &= 0. 0^{10}.1019, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} &= 0. 0^{18}.4787, \\ &\text{enz.} \end{aligned}$$

Daar nu de tellers der breuken,  $a$  en  $\rho$  standvastig blijvende, bij elke benadering hoogstens een tweede macht hooger klimmen, zoo zal deze integraalformule in het algemeen des te minder convergeren en zelfs divergeren, naarmate meer benaderingen aangewend worden.

Of nu de integraalformule ook in ons geval, namelijk voor  $r = 1000''$ ,  $\rho = 900''$  en  $a = 1800''$ , nog bruikbaar is, willen wij alleen wijzen op het toenemen van coëfficiënten der termen, die van de termen  $\frac{p^2}{8}$  en  $\frac{p^3}{16}$  en van de hoogere machten van  $\sqrt{1-p}$  afhangen, die wij niet noodig gevonden hebben verder te ontwikkelen.

Er doet zich tot eene algemeene toepassing dezer integraalformule, of beter gezegd tot het vinden van den inhoud van driehoek  $SO_0B$ , bovendien nog eene andere zwaarigheid op. In fig. 3 is namelijk de stand der schijven van zon en maan zóó voorgesteld, dat de boog  $C_0B$  door alle bogen  $SC$  slechts in één punt gesneden wordt; in die gevallen, maar ook in die alleen, mag men stellen

$$TC_0B = TSB - C_0SB \dots\dots\dots (18)$$

Dit heeft echter niet altijd plaats, want, wanneer de middelpunten van zon en maan zich meer en meer naderen tot dat de maansrand bijna op het middelpunt der zon valt, dan komen daaronder standen voor, waarin enkele bogen  $C_0C$  den boog  $C_0B$  in twee



punten zullen snijden; en dan zou het hoogst moeilijk zijn, den inhoud van  $SC_0B_4$  op wat manier ook, te bepalen.

Om alle welke redenen wij het vinden van den inhoud  $SC_0B$  door middel eener integraalformule hebben moeten opgeven.

*C. Voorbereidende berekening tot het vinden van den inhoud der bedekte oppervlakte.*

Nu geene der aangewende methoden van integratie ons hebben geleid tot het vinden van den bewusten inhoud, bleef ons niets anders over dan de bepaling van dien inhoud door verdeeling der oppervlakte in driehoekjes. Tevens moesten wij eene methode aanwenden die voor alle gevallen, die in het vraagstuk kunnen voorkomen, aanwendbaar was.

Deze methode bestond daarin, dat wij eene oppervlakte berekenen, die niet zooals de driehoek  $C_0SC$  somtijds onmogelijk te berekenen was, maar een driehoek, die bij alle afstanden der middelpunten berekend konde worden; en deze is de driehoek  $TC_0B$ , dezelfde driehoek, wiens inhoud wij kennen moeten.

Tot dat einde hebben wij den hoog  $ST$  (fig. 4) tot  $90^\circ$  in  $P$  verlengd, en door  $P$  en  $B$  een hoog  $PB$  van een grooten cirkel getrokken. Aldan is inhoud

$$TC_0B = PC_0B - PTB = PC_0B - (PSB - TSB) \dots (19)$$

Derwijl nu de hoek  $C_0PB$  blijkbaar eene functie van twee der elementen  $\phi$  en  $\beta$  van den driehoek  $SC_0B$  moet zijn, en wij de laatste oppervlakte te bezwarend gevonden hebben om te integreeren, zoo kan er des te minder sprake zijn van eene integratie der oppervlakte  $PC_0B$ , en schiet er dus ten laatste niets anders over dan deze in een aantal driehoekjes te verdeelen, en van ieder dezer driehoekjes den inhoud te zoeken. Daartoe brengen wij door alle punten  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ , en de pool  $P$ , bogen van grooten cirkels, die daardoor de oppervlakte  $PC_0B$  in even zoo vele driehoekjes verdeelen, wier twee zijden bogen van grooten cirkels, en de derde zijden deelen uitmaken van de kromme  $C_0B$ , van doorsnijding.

Om de elementen van deze driehoeken, waardoor hunne inhouden bepaald kunnen worden, te vinden, moeten wij eerst bekend hebben de hoeken  $P$  en de zijden  $PC$  van elken driehoek  $C_1PC_2$ , enz.; deze grootheden worden op de volgende wijze gevonden.

In elk der driehoeken  $SPC$  zijn gegeven  $SP = 90^\circ$ ,  $SC = \beta$  uit tabel  $F$ , en de ingesloten hoek  $PSC = \phi$ ; de waarde van  $\beta$  is

daarbij eene functie van  $SC$  in  $\phi$  (tabel F). Door deze gegevens worden de onbekende grootheden  $P$  en  $PC$  door een der beide volgende stellen formules berekend.

Laat men uit eenig punt  $C$ , fig. 4, een loodrechten boog  $CD$  op de basis  $SP$  neêr, die deze in het punt  $D$  in twee stukken  $SD = \gamma$  en  $PD = 90^\circ - \gamma$  snijdt, dan heeft men

$$Tg SD = Tg SC \cdot Cos S,$$

$$Sin SD : Sin PD = Cot S : Cot P,$$

en 
$$Cos SD : Cos PD = Cos SC : Cos PC,$$

of wel 
$$Tg \gamma = Tg \beta \cdot Cos \phi,$$

$$\left. \begin{aligned} Sin \gamma : Sin(90^\circ - \gamma) &= Cot \phi : Cot P \quad \text{of} \quad Cot P = Cot \gamma \cdot Cot \phi, \\ Cos \gamma : Cos(90^\circ - \gamma) &= Cos \beta : Cos PC \quad \text{of} \quad Cos PC = Tg \gamma \cdot Cos \beta. \end{aligned} \right\} (20)$$

Brengt men de waarde van  $Tg \gamma = Tg \beta \cdot Cos \phi$  in de beide laatste over, dan komt er

$$Cot P = \frac{Cot \beta}{Sin \phi} \quad \text{en} \quad Cos PC = Sin \beta \cdot Cos \phi; \dots (20^a)$$

of wel, met behulp der Neperiaansche analogiën,

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2}(C + P) &= \frac{Cos \frac{1}{2}(SP - SC)}{Cos \frac{1}{2}(SP + SC)} \cdot Cot \frac{1}{2} S, \\ Tg \frac{1}{2}(C - P) &= \frac{Sin \frac{1}{2}(SP - SC)}{Sin \frac{1}{2}(SP + SC)} \cdot Cot \frac{1}{2} S, \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

$$\text{en } Tg \frac{1}{2} PC = Tg \frac{1}{2}(SP + SC) \frac{Cos \frac{1}{2}(C + P)}{Cos \frac{1}{2}(C - P)} = Tg \frac{1}{2}(SP - SC) \frac{Sin \frac{1}{2}(C + P)}{Sin \frac{1}{2}(C - P)},$$

of in plaats van deze laatste

$$Sin PC = \frac{Sin \phi}{Sin P} Sin SC.$$

Deze laatste formules ondergaan, door  $SP = 90^\circ$  daarin over te brengen, de volgende vereenvoudigingen

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2}(C + P) &= Tg \frac{1}{2}(90^\circ + \beta) \cdot Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2}(P - C) &= Cotg \frac{1}{2}(90^\circ + \beta) \cdot Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2} PC &= Cot \frac{1}{2}(90^\circ + \beta) \frac{Cos \frac{1}{2}(C + P)}{Cos \frac{1}{2}(C - P)}. \end{aligned} \right\} \dots (21^a)$$

De berekeningen volgens het eerste stel formules (20<sup>a</sup>) loopen spoediger af; zij volgen hier voor eenige waarden van  $\phi$ .

| $\phi =$               | 1°        | 6°         | 12°        | 15°        | 17°        | 17°40'     |
|------------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\beta =$              | 63°56'42" | 65°15'25"  | 70°9'24"   | 75°20'27"  | 82°8'26"   | 88°43'12"  |
| <i>Log Cot</i> $\beta$ | 9.6892390 | 9.6635684  | 9.5573588  | 9.4176104  | 9.1400052  | 8.3491597  |
| <i>Log Sin</i> $\phi$  | 8.2418553 | 9.0192346  | 9.3178789  | 9.4129962  | 9.4659353  | 9.4821283  |
| <i>Log Cot</i> P       | 1.4473837 | 0.6443338  | 0.2394799  | 0.0046142  | 9.6740699  | 8.8670314  |
| P =                    | 2°2'39"9  | 12°46'49"0 | 29°56'51"0 | 44°41'44"3 | 64°43'34"3 | 85°47'20"9 |
| <i>Log Sin</i> $\beta$ | 9.9534565 | 9.9581786  | 9.9734162  | 9.9856278  | 9.9959011  | 9.9998916  |
| <i>Log Cos</i> $\phi$  | 9.9999338 | 9.9976143  | 9.9904044  | 9.9849438  | 9.9805963  | 9.9790192  |
| <i>Cos</i> PC          | 9.9533903 | 9.9557929  | 9.9638206  | 9.9705716  | 9.9764974  | 9.9789108  |
| PC =                   | 26°4'22"4 | 25°24'56"1 | 23°3'49"4  | 20°51'18"8 | 18°40'48"3 | 17°42'41"4 |

De overige waarden van P en PC worden in tabel G gevonden.

De gevondene waarden voor den hoek P en de zijde PC, van iederen bolvormigen driehoek  $PC_{n-1}P_n$  kunnen, dewijl in ieder van deze twee zijden  $PC_{n-1}$  en  $PC_n$  en de ingesloten hoek  $P_n - P_{n-1}$  bekend zijn, gebruikt worden om den inhoud van ieder dezer driehoeken, door middel van hunne spherische excessen, te berekenen.

Het is namelijk uit de bolvormige driehoeksmeting bekend, dat de inhoud van iederen bolvormigen driehoek tot dien van het spherisch octant dezelfde verhouding heeft als zijn spherisch exces tot een rechten hoek. Stelt  $I$  den inhoud van een bolvormigen driehoek,  $\Delta$  dien van het spherisch octant, en  $\varepsilon$  het spherisch exces voor, dan is

$$I : \Delta = \varepsilon : 90^\circ, \text{ of } I = \frac{90}{\varepsilon} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

of, wel, wanneer  $A, B, C$  de hoeken van den driehoek beteekenen

$$I = \frac{(A + B + C) - 180^\circ}{90^\circ} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

Het spherisch exces  $\varepsilon$ , dat onmiddellijk van de grootte der hoeken eens bolvormigen driehoeks afhangt, zal dus gevonden worden, wanneer men  $180^\circ$  van de som der hoeken aftrekt. Zijn de gegevens van een driehoek andere dan de drie hoeken, in ons geval twee zijden en de ingesloten hoek, dan vindt men  $\varepsilon$  door de formule

$$\text{Cot } \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{\text{Cot } \frac{1}{2} a \cdot \text{Cot } \frac{1}{2} b + \text{Cos } C}{\text{Sin } C},$$

$$\text{welke, door te stellen } \frac{\text{Cot } \frac{1}{2} a \cdot \text{Cot } \frac{1}{2} b}{\text{Cos } C} = \text{Tg}^2 \mu,$$

tot dezen, beter voor de berekening geschikt, vorm wordt omgezet

$$Tg \frac{1}{2} \epsilon = Tg C \cos^2 \mu \dots \dots \dots (24)$$

Hoewel deze formule eenvoudig genoeg voor de bewerking is, geven wij toch aan de eerste de voorkeur, namelijk, aan het berekenen der beide overige hoeken van den driehoek. Daartoe hebben wij niets anders noodig dan de som der beide overige hoeken, en kunnen wij volstaan met de berekening van de eerste formule der Neperiaansche analogiën

$$Tg \frac{1}{2} (C_{n-1} + C_n) = \frac{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} - PC_n)}{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} + PC_n)} \cot \frac{1}{2} (P_n - P_{n-1}) \dots (25)$$

Wanneer wij de waarden van SC uit tabel F, voor waarden van  $\phi$  van 10 tot 10' wilden interpoleeren, en voor deze in tabel E de overeenkomstige waarden van  $\beta$  zoeken, en verder, voor al die waarden van  $\phi$ , P en PC uit tabel G interpoleren, dan zouden wij de geheele bedekte oppervlakte der zon in 112 bolvormige driehoeken verdeelen.

Het komt ons echter voor, dat de nauwkeurigheid ver genoeg voortgezet zal zijn, zoo wij ons voor de berekening van den inhoud bepalen tot de waarden van  $\phi$ , in tabel F aangenomen, in welk geval er nog 39 bolvormige driehoeken te berekenen zijn; welke inhouden dan wellicht met minder moeite tot elken gewenschten graad van nauwkeurigheid kunnen geïnterpoleerd worden.

Deze laatste verdeling in 39 driehoeken behoudende, zoeken wij eerst de elementen derzelfde uit tabel G, welke wij in tabel H mededeelen, om dan daarmede met behulp der formule (25), de halve som der onbekende hoeken te berekenen. Tabel H bevat nog in hare laatste kolommen de sinus-versussen zoowel der enkele zijden als die van hunne gemiddelde waarden, welke wij later noodig zullen hebben.

Ziehier de berekening van het spherisch excès  $\epsilon$ .

| Driehoek N°.                                     | 1            | 7              | 13             | 22             | 31             | 39             |
|--------------------------------------------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\frac{1}{2} (PC_0 - PC_1) =$                    | 0° 0' 33" 4  | 0° 7' 41" 4    | 0° 6' 1" 8     | 0° 9' 22" 6    | 0° 6' 38" 2    | 0° 0' 59" 7    |
| $\frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) =$                    | 26 4 55 7    | 25 17 15 8     | 22 57 47 7     | 20 41 56 5     | 18 34 10 2     | 17 41 44 7     |
| $\frac{1}{2} (P_1 - P_0) =$                      | 1 1 20 0     | 1 11 14 3      | 0 38 37 2      | 1 10 0 2       | 1 30 20 1      | 1 38 53 5      |
| <i>Log Cos <math>\frac{1}{2}</math> verschil</i> | 0.0000000    | 9.9999989      | 9.9999993      | 9.9999984      | 9.9999992      | 0.0000000      |
| <i>Log Sec <math>\frac{1}{2}</math> som</i>      | 0.0466432    | 0.0437499      | 0.0358558      | 0.0289794      | 0.0232199      | 0.0210511      |
| <i>Log Cot <math>\frac{1}{2}</math> P</i>        | 1.7485312    | 1.6834981      | 1.9494433      | 1.6910949      | 1.5803179      | 1.5409946      |
|                                                  | 1.7951744    | 1.7272469      | 1.9852984      | 1.7200727      | 1.6035370      | 1.5620457      |
| $\frac{1}{2} (C + C) =$                          | 89° 4' 54.68 | 88° 53' 35" 18 | 89° 24' 26" 53 | 88° 54' 30" 84 | 88° 34' 21" 95 | 88° 25' 47" 10 |
| $\frac{1}{2} P =$                                | 1 1 20.00    | 1 11 14 30     | 0 38 37 20     | 1 30 0 20      | 1 30 20 10     | 1 38 53 50     |
| $90^\circ + \frac{1}{2} \epsilon =$              | 90 6 14 68   | 90 6 49 48     | 90 3 3 73      | 90 4 31 04     | 90 4 42 05     | 90 4 40 60     |
| $\epsilon$                                       | 12' 29" 36   | 13' 38" 96     | 6' 7" 46       | 9' 2" 08       | 9' 24" 10      | 9' 21" 20      |

Door op deze wijze de bewerkingen voort te zetten hebben wij de spherische excessen van al de 39 driehoeken verkregen.

*Tabel I. Spherische excessen der 39 bolvormige driehoeken.*

| n <sup>o</sup> . | ε          | n <sup>o</sup> . | ε          | n <sup>o</sup> . | ε        | n <sup>o</sup> . | ε         | n <sup>o</sup> . | ε           |
|------------------|------------|------------------|------------|------------------|----------|------------------|-----------|------------------|-------------|
| 1                | 12' 29" 36 | 9                | 14' 47" 24 | 17               | 7' 0" 00 | 25               | 5' 39" 60 | 33               | 14' 20" 80  |
| 2                | 12 32 78   | 10               | 15 21 50   | 18               | 7 17 56  | 26               | 6 0 04    | 34               | 3 35 08     |
| 3                | 12 38 26   | 11               | 16 15 30   | 19               | 7 37 52  | 27               | 6 28 18   | 35               | 4 2 80      |
| 4                | 12 47 80   | 12               | 17 23 22   | 20               | 8 0 98   | 28               | 6 55 86   | 36               | 4 45 46     |
| 5                | 12 58 58   | 13               | 6 7 46     | 21               | 8 28 86  | 29               | 7 32 36   | 37               | 5 55 06     |
| 6                | 13 17 40   | 14               | 6 18 26    | 22               | 9 2 08   | 30               | 8 18 54   | 38               | 9 11 86     |
| 7                | 13 38 96   | 15               | 6 30 78    | 23               | 9 44 14  | 31               | 9 24 10   | 39               | 9 21 20     |
| 8                | 14 5 34    | 16               | 6 45 00    | 24               | 10 32 58 | 32               | 11 9 42   | 1-39             | 374' 21" 82 |

*D. Berekening van den inhoud van het bedekte gedeelte der zon en zijne verhouding tot de geheele zichtbare oppervlakte voor den aangenomen afstand der middelpunten.*

Zooals wij reeds hebben opgemerkt, is het halve bedekte gedeelte der zon  $TBC_0T$ , fig. 4, ingesloten door een boog van een grooten cirkel  $C_0T$ , door een boog van een kleinen cirkel  $TB$ , en door eene spherische lijn  $C_0B$ , de doorsnede van het kegelvlak der maan met de oppervlakte der zon, — van welke kromme wij de vergelijking niet kennen, maar die wij aanvankelijk door 39 bogen van groote cirkels hebben vervangen. Dit bedekte gedeelte maakt een deel uit van de oppervlakte  $PBC_0P$ , welke wij in bolvormige driehoeken hebben verdeeld, en verschilt daarvan de oppervlakte van den bijgevoegden driehoek  $PBT$ . De laatstgenoemde driehoek is wederom gelijk aan het verschil van den zuiveren bolvormigen driehoek  $PBS$ , en het bolvormig segment  $BST$ , zoodat wij hebben

$$Inh. TBC_0 = Inh. PBC_0 - (Inh. PBS - Inh. TBS).$$

Dewijl nu  $PBS$  en  $TBS$  nauwkeurig uit de gegevens kunnen berekend worden, zoo zullen wij ons eerst bezig houden met het vinden van den inhoud  $PBC_0$ .

Genoemde inhoud kan nu op verschillende wijzen bepaald worden, naar gelang men voor de lijntjes, die de deelpunten  $C_0, C_1, C_2, \dots B$  onderling verbinden, den een of anderen vorm meent te mogen aannemen.

In de eerste plaats kan men de strooken, waarin wij de oppervlakte verdeeld hebben, beschouwen als zoovele bolvormige segmenten, waarvan de hoeken aan de pool gelijk zijn aan de in tabel H gevondene hoeken P, en waarvan de boog het gemiddelde der zijden  $PC_0$  en  $PC_1$ ,  $PC_1$  en  $PC_2$  enz. bedraagt; alsdan neemt men voor de verbindingslijntjes  $C_0C_1$  enz. kleine cirkels aan.

Ten anderen kunnen wij elke strook  $PC_0C_1$  verdeelen in een segment  $PC_0C'$ , dat ontstaat, wanneer men uit P met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een boog beschrijft, die de grootste zijde  $PC_1$  in  $C'$  snijdt, en in een driehoekje  $C_0C'C_1$ , hetwelk dan op een plat vlak moet worden overgebracht.

Dat driehoekje zal rechthoekig zijn, en zijn inhoud kan gevonden worden, hetzij men zijne schuine zijde, ontwikkeld zijnde, als eene rechte lijn, hetzij als eene parabolische kromme van hoogere orde beschouwt.

Ten derde, wanneer de boogjes  $C_0C_1$ , enz. als bogen van groote cirkels worden aangenomen, alsdan moeten alle strooken als bolvormige driehoeken behandeld worden.

1°. *De strooken beschouwd als segmenten met gemiddelde zijden tot boog.*

Noemen wij  $I$  den inhoud van het bolvormig segment, en  $R$  den straal van den bol, dan is

$$I = 2\pi R \times R \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \times \frac{\angle C_0PC_1}{360^\circ} = \\ = \pi R^2 \times \frac{\angle C_0PC_1}{180^\circ} \times \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \dots (26)$$

Ten einde aan de eene zijde te groote getallen, en aan de andere zijde te veel nullen achter het decimaalteeken te vermijden, nemen wij de minuut als eenheid aan; zoodat  $R = 3437'74677$  moet genomen worden. Hierdoor verandert de laatste formule in de volgende

$$I = \frac{\pi}{180^\circ} \times (3437'74677)^2 \times \angle C_0PC_1 \times \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) (26')$$

of, de factor in logarithmen overgebracht en de hoeken  $C_0PC$  en  $180^\circ$ , in seconden uitgedrukt, verkrijgt men

$$\begin{array}{ll} 2 \text{ Log } R = 2 \times 3.5362739 & = 7.0725478 \\ \text{Log } \pi & = 0.4971499 \\ \text{Colog } 180 \times 3600'' & = 4.1884250 - 10 \\ \text{Log coëfficient} & = 1.7581227 \end{array}$$

dus  $\text{Log } I = 1.7581227 + \text{Log Sinvers } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) +$   
 $+ \text{Log } \angle C_0 PC_1 \text{ (in seconden) } \dots \dots \dots (26')$

In tabel H worden in de kolom met  $P_1 - P_0$  aan het hoofd de waarden der hoeken  $C_0 PC_1$ , en in de vóórlaatste kolom de sinversussen van  $\frac{1}{2} (PC_0 + PC_1)$  opgegeven. De berekening van  $I$  gaat nu gemakkelijk en aldus

| Nº.                                          | 1         | 7         | 13        | 22        | 31        |
|----------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\angle C_0 PC_1$                            | 7359°9    | 8548°6    | 4634°3    | 8400°3    | 10840°1   |
| $\text{Log } C_0 PC_1$                       | 3.8668719 | 3.9318950 | 3.6659841 | 3.9242948 | 4.0350333 |
| $\text{Log Sinv } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1)$ | 9.0078971 | 8.9814834 | 8.8989664 | 8.8098962 | 8.7165208 |
| $\text{Log Sinv coëfficient}$                | 1.7581227 | 1.7581227 | 1.7581229 | 1.7581227 | 1.7581227 |
| $\text{Log } I$                              | 4.6328917 | 4.6715011 | 4.3230734 | 4.4923137 | 4.5096768 |
| $I =$                                        | 42942.93  | 46935.47  | 21041.33  | 31068.03  | 32335.20  |

Op deze wijze zijn de inhouden van alle 39 bolvormige segmenten berekend, waarvan de uitkomsten in de volgende tabel K gevonden worden.

Tabel K. *Inhouden der bolvormige segmenten.*

| Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº.  | Inhoud.    |
|-----|----------|-----|----------|-----|----------|------|------------|
| 1   | 42942'93 | 11  | 55912'16 | 21  | 29169'70 | 31   | 32335'29   |
| 2   | 43109 24 | 12  | 59813 24 | 22  | 31068 03 | 32   | 38378 92   |
| 3   | 43459 15 | 13  | 21041 33 | 23  | 33480 26 | 33   | 49486 37   |
| 4   | 43997 03 | 14  | 21678 70 | 24  | 36339 43 | 34   | 12325 65   |
| 5   | 44748 10 | 15  | 22396 22 | 25  | 19454 84 | 35   | 13920 00   |
| 6   | 45699 92 | 16  | 23189 98 | 26  | 20629 30 | 36   | 16289 86   |
| 7   | 46935 47 | 17  | 24070 00 | 27  | 22087 57 | 37   | 20346 88   |
| 8   | 48539 03 | 18  | 25073 44 | 28  | 23834 87 | 38   | 31640 04   |
| 9   | 50411 08 | 19  | 26218 57 | 29  | 25926 26 | 39   | 32171 30   |
| 10  | 52826 95 | 20  | 27563 03 | 30  | 28471 40 | 1—39 | 1287031.54 |

De inhouden dezer 39 driehoekjes bij elkander geteld, verkrijgt men voor hunne som den gevraagden inhoud van

$$PBC_0 = 1,286,031'54 \square \text{ minuten.}$$

De vorm der formule (26) geeft wel aanleiding, om den inhoud van een bolvormig segment als eene volkomen ontwikkelbare oppervlakte op een plat vlak over te brengen. Immers zij bestaat uit

twee factoren  $1^{\circ} . 2\pi R \times \frac{LC_0PC_1}{360}$ , dat is, een gedeelte van den

omtrek van den grooten cirkel van den bol, en  $2^{\circ} . R \text{ Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1)$ , dat is de sinusversus van den boog van het segment; en daar deze beide factoren zich in dezelfde eenheid laten uitdrukken, zoo zal de oppervlakte van elk bolvormig segment kunnen voorgesteld worden door een op schaal geteekenden platten rechthoek. Alle onze 39 bolvormige segmenten zullen dan zoovele rechthoeken kunnen voorstellen, met den eersten factor als grondlijnen of abscissen en met den tweeden als opstaande zijden of ordinaten; en wanneer wij nu al die grondlijnen naast elkander op eene rechte lijn plaatsen, en dus ook de rechthoeken, die ook verschillende hoogten hebben, dan zal de fig. 5 den geheelen inhoud  $PBC_0$ , op een plat vlak ontwikkeld, voorstellen. De geheele basis van de aldus ontstane figuur zal dan,  $R$  weder in minuten uitdrukkende, gelijk zijn aan  $2\pi R \times \frac{LPBC_0}{360} = 2\pi \times 3437'.74677 \times \frac{89^{\circ}5'7''}{360}$  (tabel G) =  $5345'12$ , de hoogte van den eersten rechthoek  $= R \times \text{Sinv } 26^{\circ}4'55''.7 = 3437'.74677 \times 0.101825 = 349'963$ ; en die van den laatsten  $= 3437'.74677 \times 0.047316 = 161'610$ . Nemen wij nu, om de figuur te teekenen, bijv. voor iedere 1000' van de basis eene lengte van 25 mm., en, ten einde de kromte der lijn beter te doen uitkomen, voor iedere 100' der hoogte eene lengte van 50 mm., dan ontstaat figuur 5, waarin al de 39 segmenten afgekort, om ruimte te winnen, naast elkander voorkomen.

## 2°. De strooken verdeeld in segmenten en driehoekjes.

Wanneer wij in elke strook  $C_0PC_1$  uit de pool  $P$  met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een cirkelboogje beschrijven, die de langste zijde  $PC_1$  in  $C'$  ontmoet, dan verdeelen wij die allen in segmenten met hunne kleinste zijden tot boog, en in een driehoekje  $C_0C_1C'$ . De inhouden van de achtereenvolgende segmenten worden dan op de zoo even aangewezen manier, doch met de kleinste zijde als boog, nauwkeurig gevonden; doch de inhouden der driehoekjes, — daar voor deze geene formule op den bol te vinden is, en zij dus ook niet volkomen op een plat vlak kunnen worden uitgelegd —, moeten door benadering gevonden worden.

Berekenen wij eerst de inhouden der segmenten. Hiertoe moeten wij nemen de sinus-versussen der kleinste bogen van elken driehoek,



welker waarden in de laatste kolom van tabel H gevonden worden. De berekening geschiedt weder volgens formule (26<sup>b</sup>).

*Tabel L. Inhouden der bolvormige segmenten.*

| Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº.  | Inhoud.    |
|-----|----------|-----|----------|-----|----------|------|------------|
| 1   | 42912'99 | 11  | 54817'04 | 21  | 28757'11 | 31   | 31954'57   |
| 2   | 43021 37 | 12  | 58436 57 | 22  | 30606 47 | 32   | 37899 28   |
| 3   | 43313 16 | 13  | 20860 24 | 23  | 32943 68 | 33   | 48830 72   |
| 4   | 43779 58 | 14  | 21480 97 | 24  | 35763 03 | 34   | 12292 25   |
| 5   | 44441 34 | 15  | 22179 57 | 25  | 19278 30 | 35   | 13877 17   |
| 6   | 45323 52 | 16  | 22951 80 | 26  | 20435 07 | 36   | 16236 77   |
| 7   | 46466 72 | 17  | 23809 33 | 27  | 21869 67 | 37   | 20283 60   |
| 8   | 47896 83 | 18  | 24784 90 | 28  | 23587 18 | 38   | 31530 35   |
| 9   | 49697 42 | 19  | 25897 99 | 29  | 25645 81 | 39   | 32114 86   |
| 10  | 51947 07 | 20  | 27211 00 | 30  | 28142 56 | 1-39 | 1273282.86 |

*Berekening van de inhouden der driehoekjes.*

Leggen wij zooveel doenlijk de overgeblevene driehoekjes op een plat vlak neêr, dan zullen zij, dewijl de zijden der segmenten loodrecht op hunne basissen staan, ook rechthoekige driehoekjes moeten vormen, wier basissen, ontwikkeld, gelijk zijn aan den boog van den kleinen cirkel, die ook de bogen der segmenten vormt, en wier hoogten, mede ontwikkeld, gelijk zijn aan het verschil der zijden van iedere strook of segment; derhalve hunnen

$$\text{Inhoud} = (\angle C_0 PC_1 \times \sin PC_1) \times \frac{1}{2} (PC_0 - PC_1).$$

Voor de inhouden dezer driehoekjes, als zoodanig beschouwd, vinden wij in tabel M de volgende waarden.

*Tabel M. Inhoud der rechthoekige driehoekjes.*

| Nº. | Inhoud. | Nº. | Inhoud. | Nº. | Inhoud. | Nº.  | Inhoud. |
|-----|---------|-----|---------|-----|---------|------|---------|
| 1   | 30'01   | 11  | 1092'23 | 21  | 411'14  | 21   | 379'60  |
| 2   | 88 24   | 12  | 1368 30 | 22  | 460 42  | 32   | 478 21  |
| 3   | 150 45  | 13  | 180 95  | 23  | 533 10  | 33   | 654 37  |
| 4   | 217.00  | 14  | 197 35  | 24  | 623 57  | 34   | 33 99   |
| 5   | 289 50  | 15  | 216 03  | 25  | 174 44  | 35   | 39 56   |
| 6   | 370 46  | 16  | 237 44  | 26  | 193 33  | 36   | 48 19   |
| 7   | 464 31  | 17  | 260 21  | 27  | 217 75  | 37   | 62 48   |
| 8   | 575 43  | 18  | 287 67  | 28  | 246 69  | 38   | 109 35  |
| 9   | 709 93  | 19  | 319 55  | 29  | 280 01  | 39   | 56 19   |
| 10  | 876 11  | 20  | 350 76  | 30  | 317 25  | 1-39 | 136.02  |

De voorgaande berekening van de inhouden der driehoekjes, als plat en rechthoekig beschouwd, mogen wij niet als nauwkeurig genoeg houden, dewijl wij daardoor van de onderstelling zijn uitgegaan, dat hunne schuine zijden rechte lijnen zijn. De loop der kromme lijn van figuur 5 doet immers zien, dat wij die onderstelling, vooral niet bij het begin en het einde der kromme mogen aannemen, maar dat wij de schuine lijnen der driehoekjes moeten vervangen door kromme lijnen. Wij komen alzoo tot het vraagstuk om den inhoud eener vlakke kromme lijn bij benadering te vinden.

Zooals men weet, beschouwt men voor dat doel, de kromme als eene parabool van hoogere macht, en neemt men tot gemak der berekening alle opvolgende abcissenverschillen aan elkander gelijk; voor welke abcissen dan de ordinaten der kromme moeten bekend zijn. Alvorens wij dus tot de inhoudvinding van onze driehoekjes kunnen overgaan, is het allereerst noodig, dat wij de waarden van de hoeken P of der deelen van de basis van ieder der segmenten afzonderlijk even groot maken, en daarna voor elk dier abcissen de overeenkomstige waarden der ordinaten berekenen.

Deze bewerking geeft de gelegenheid aan de hand om de nauwkeurigheid der inhoudsvinding binnen veel engere grenzen te brengen dan wij tot hertoe gedaan hebben, dewijl daardoor het aantal deelen, waarin elke basis verdeeld wordt, meer en meer vergroot wordt. Het komt ons voor, dat wij ons doel, eenen genoegzamen graad van nauwkeurigheid, zullen bereiken, wanneer wij ons voor de verdeling bepalen tot iedere 10' boogs van  $\phi$ , alzoo dat elk der bogen van 0 tot 1°, van 1—2° ... en van 11 tot 12° nog in zes; en de bogen 12° tot 12° 20', enz. ... en van 15° 40 tot 16° nog in twee gelijke deelen worden verdeeld; door welke onderverdeling onze kromme lijn van figuur 5, in 112 punten verdeeld wordt. Ware PC in functie van P gegeven, dan zou het eenvoudiger geweest zijn, de hoeken P van ieder der hierboven genoemde driehoeken in 6 of in 2 gelijke deelen te verdeelen, en voor die tusschenwaarden de PC of de ordinaten volgens de alsdan bestaande formule te berekenen. Nu echter kunnen wij niet anders dan of met de nieuwe waarden van  $\phi$  die grootheden P en PC volgens formule 20° onmiddellijk berekenen, of die door interpolatiën vinden. Wij hebben de laatste bewerking als de eenvoudigste verkozen, en zoeken, uit de gegevens van tabel G, de tusschenwaarden van P en PC, door eerst in de helft, en later in drieën te interpoleeren. Wij vinden dan

Het tweede gedeelte  $N$  is gelijk de beide volgende

$$\begin{aligned} \int N d\phi &= \int \sqrt{r^2 - \rho^2 - a^2 \cos 2\phi + 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}} d\phi - \\ &\quad - \int \frac{1}{2} \{ \rho^2 + a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi} \} \times \\ &\quad \times \sqrt{r^2 - \rho^2 - a^2 \cos 2\phi + 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}} d\phi. \end{aligned}$$

Stellen wij, in plaats van den wortelvorm

$$\sqrt{1-p} = 1 - \frac{p}{2} - \frac{p^2}{8} - \frac{p^3}{16} - \dots, \dots (19'')$$

dan komt er

$$\begin{aligned} (N_1) + \sqrt{r^2 - \rho^2} \int &\left\{ 1 - \frac{a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}}{2(r^2 - \rho^2)} - \right. \\ &\quad - \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^2}{8(r^2 - \rho^2)^2} - \\ &\quad \left. - \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^3}{16(r^2 - \rho^2)^3} \right\} d\phi - \\ &\quad - \int \frac{1}{2} (\rho^2 + a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}) \times \\ &\quad \times \sqrt{r^2 - \rho^2} \left\{ 1 - \frac{a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}}{2(r^2 - \rho^2)} - \right. \\ &\quad - \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^2}{8(r^2 - \rho^2)^2} - \\ &\quad \left. - \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^3}{16(r^2 - \rho^2)^3} \right\} d\phi. \end{aligned}$$

Het oplossen dezer integraalformule zou neerkomen op het berekenen van 33 nog al vrij samengestelde termen, onder verwaarloozing van de vierde en hoogere machten der reeks, waarin  $\sqrt{1-p}$  (19'') ontwikkeld is.

Heeft men de waarde van  $r \int \cos \beta d\phi$  gevonden, dan moet die nog door  $r$  gedeeld en dat quotient van  $\phi$  worden afgetrokken, om den inhoud te verkrijgen van het driehoekig stuk  $SC_0B$  (fig. 4).

Wij willen nu gaan onderzoeken, of deze integraalformule toegepast kan worden, 1° in het algemeen, of 2° in het bijzonder voor ons geval.

Voor eene algemeene toepasselijkheid moeten in de eerste plaats de coëfficiënten der onderscheidene termen kleiner en kleiner worden, hoe meer termen men van  $\sqrt{1-p}$  (19'') neemt. Wij zien daade-

lijk, dat bijna al de termen zijn aangedaan door een coëfficiënt van den vorm  $\frac{a^n \rho^n}{(r^2 - \rho^2)^n}$ : en het zal dus hoofdzakelijk van de waarde van  $(r^2 - \rho^2)$  afhangen, of de reeks al dan niet convergeert. En al dadelijk zien wij in, dat daar  $r$  en  $\rho$  bijna aan elkander gelijk kunnen zijn,  $(r^2 - \rho^2)^n$  eene zeer kleine grootheid worden kan, en dus de breuk  $\frac{a^n \rho^n}{(r^2 - \rho^2)^n}$  in diezelfde en boven mate zal vergroot worden.

Stellen wij b. v.  $r = 1000''$  en  $\rho = 999''$  of  $r = 0.0048481368$   $\rho = 0.00484832886$  voor den straal  $= 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{dan is} \quad (r^2 - \rho^2)^1 &= 0.0000.0004.6992, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} &= 0.0002.1677.0850, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} &= 0.010.1019, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} &= 0.018.4787, \\ &\text{enz.} \end{aligned}$$

Daar nu de tellers der breuken,  $a$  en  $\rho$  standvastig blijvende, bij elke benadering hoogstens een tweede macht hooger klimmen, zoo zal deze integraalformule in het algemeen des te minder convergeren en zelfs divergeren, naarmate meer benaderingen aangewend worden.

Of nu de integraalformule ook in ons geval, namelijk voor  $r = 1000''$ ,  $\rho = 900''$  en  $a = 1800''$ , nog bruikbaar is, willen wij alleen wijzen op het toenemen van coëfficiënten der termen, die van de termen  $\frac{p^2}{8}$  en  $\frac{p^3}{16}$  en van de hoogere machten van  $\sqrt{1-p}$  afhangen, die wij niet noodig gevonden hebben verder te ontwikkelen.

Er doet zich tot eene algemeene toepassing dezer integraalformule, of beter gezegd tot het vinden van den inhoud van driehoek  $SO_0B$ , bovendien nog eene andere zwaarigheid op. In fig. 3 is namelijk de stand der schijven van zon en maan zóó voorgesteld, dat de boog  $C_0B$  door alle bogen  $SC$  slechts in één punt gesneden wordt; in die gevallen, maar ook in die alleen, mag men stellen

$$TC_0B = TSB - C_0SB \dots \dots \dots (18)$$

Dit heeft echter niet altijd plaats, want, wanneer de middelpunten van zon en maan zich meer en meer naderen tot dat de maansrand bijna op het middelpunt der zon valt, dan komen daaronder standen voor, waarin enkele bogen  $C_0C$  den boog  $C_0B$  in twee

punten zullen aarzelen; en dan zou het hoogst moeilijk zijn, den inhoud van  $SC_0B$ , op wat manier ook, te bepalen.

Om alle welke redenen wij het vinden van den inhoud  $SC_0B$  door middel eener integraalformule hebben moeten opgeven.

*C. Voorbereidende berekening tot het vinden van den inhoud der bedekte oppervlakte.*

Nu geene der aangewende methoden van integratie ons hebben geleid tot het vinden van den bewusten inhoud, bleef ons niets anders over dan de bepaling van dien inhoud door verdeeling der oppervlakte in driehoekjes. Tevens moesten wij eene methode aanwenden die voor alle gevallen, die in het vraagstuk kunnen voorkomen, aanwendbaar was.

Deze methode bestond daarin, dat wij eene oppervlakte berekenen, die niet zooals de driehoek  $C_0SC$  somtijds onmogelijk te berekenen was, maar een driehoek, die bij alle afstanden der middelpunten berekend konde worden; en deze is de driehoek  $TC_0B$ , dezelfde driehoek, wiens inhoud wij kennen moeten.

Tot dat einde hebben wij den hoek  $ST$  (fig. 4) tot  $90^\circ$  in  $P$  verlengd, en door  $P$  en  $B$  een hoek  $PB$  van een grooten cirkel getrokken. Alsdan is inhoud

$$TC_0B = PC_0B - PTB = PC_0B - (PSB - TSB) \dots (19)$$

Dewijl nu de hoek  $C_0PB$  blijkbaar eene functie van twee der elementen  $\phi$  en  $\beta$  van den driehoek  $SC_0B$  moet zijn, en wij de laatste oppervlakte te bezwarend gevonden hebben om te integreeren, zoo kan er des te minder sprake zijn van eene integratie der oppervlakte  $PC_0B$ , en schiet er dus ten laatste niets anders over dan deze in een aantal driehoekjes te verdeelen, en van ieder dezer driehoekjes den inhoud te zoeken. Daartoe brengen wij door alle punten  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  en de pool  $P$ , bogen van groote cirkels, die daardoor de oppervlakte  $PC_0B$  in even zoo vele driehoekjes verdeelen, wier twee zijden bogen van groote cirkels, en de derde zijden deelen uitmaken van de kromme  $C_0B$  van doorsnijding.

Om de elementen van deze driehoeken, waardoor hunne inhouden bepaald kunnen worden, te vinden, moeten wij eerst bekend hebben de hoeken  $P$  en de zijden  $PC$  van elken driehoek  $C_1PC_2$ , enz.; deze grootheden worden op de volgende wijze gevonden.

In elk der driehoeken  $SPC$  zijn gegeven  $SP = 90^\circ$ ,  $SC = \beta$  uit tabel  $F$ , en de ingesloten hoek  $PSC = \phi$ ; de waarde van  $\beta$  is

daarbij eene functie van SC in  $\phi$  (tabel F). Door deze gegevens worden de onbekende grootheden P en PC door een der beide volgende stellen formules berekend.

Laat men uit eenig punt C, fig. 4, een loodrechten boog CD op de basis SP neêr, die deze in het punt D in twee stukken SD =  $\gamma$  en PD =  $90^\circ - \gamma$  snijdt, dan heeft men

$$Tg SD = Tg SC \cdot Cos S,$$

$$Sin SD : Sin PD = Cot S : Cot P,$$

en 
$$Cos SD : Cos PD = Cos SC : Cos PC,$$

of wel 
$$Tg \gamma = Tg \beta \cdot Cos \phi,$$

$$\left. \begin{aligned} Sin \gamma : Sin (90^\circ - \gamma) &= Cot \phi : Cot P \quad \text{of} \quad Cot P = Cot \gamma \cdot Cot \phi, \\ Cos \gamma : Cos (90^\circ - \gamma) &= Cos \beta : Cos PC \quad \text{of} \quad Cos PC = Tg \gamma \cdot Cos \beta. \end{aligned} \right\} (20)$$

Brengt men de waarde van  $Tg \gamma = Tg \beta \cdot Cos \phi$  in de beide laatste over, dan komt er

$$Cot P = \frac{Cot \beta}{Sin \phi} \quad \text{en} \quad Cos PC = Sin \beta \cdot Cos \phi; \dots (20^*).$$

of wel, met behulp der Neperiaansche analogiën,

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2} (C + P) &= \frac{Cos \frac{1}{2} (SP - SC)}{Cos \frac{1}{2} (SP + SC)} \cdot Cot \frac{1}{2} S, \\ Tg \frac{1}{2} (C - P) &= \frac{Sin \frac{1}{2} (SP - SC)}{Sin \frac{1}{2} (SP + SC)} \cdot Cot \frac{1}{2} S, \end{aligned} \right\} \dots (21).$$

en 
$$Tg \frac{1}{2} PC = Tg \frac{1}{2} (SP + SC) \frac{Cos \frac{1}{2} (C + P)}{Cos \frac{1}{2} (C - P)} = Tg \frac{1}{2} (SP - SC) \frac{Sin \frac{1}{2} (C + P)}{Sin \frac{1}{2} (C - P)},$$

of in plaats van deze laatste

$$Sin PC = \frac{Sin \phi}{Sin P} Sin SC.$$

Deze laatste formules ondergaan, door  $SP = 90^\circ$  daarin over te brengen, de volgende vereenvoudigingen

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2} (C + P) &= Tg \frac{1}{2} (90^\circ + \beta) \cdot Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2} (P - C) &= Cotg \frac{1}{2} (90^\circ + \beta) \cdot Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2} PC &= Cot \frac{1}{2} (90^\circ + \beta) \frac{Cos \frac{1}{2} (C + P)}{Cos \frac{1}{2} (C - P)}. \end{aligned} \right\} \dots (21^*)$$

De berekeningen volgens het eerste stel formules (20\*) loopen spoediger af; zij volgen hier voor eenige waarden van  $\phi$ .

| $\phi =$               | 1°        | 6°         | 12°        | 15°        | 17°        | 17°40'     |
|------------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\beta =$              | 63°56'42" | 65°15'25"  | 70°9'24"   | 75°20'27"  | 82°8'26"   | 88°43'12"  |
| <i>Log Cot</i> $\beta$ | 9.6892390 | 9.6635684  | 9.5573588  | 9.4176104  | 9.1400052  | 8.3491597  |
| <i>Log Sin</i> $\phi$  | 8.2418553 | 9.0192346  | 9.3178789  | 9.4129962  | 9.4659353  | 9.4821283  |
| <i>Log Cot</i> P       | 1.4473837 | 0.6443338  | 0.2394799  | 0.0046142  | 9.6740699  | 8.8670314  |
| P =                    | 2°2'39"9  | 12°46'49"0 | 29°56'51"0 | 44°41'44"3 | 64°43'34"3 | 85°47'20"9 |
| <i>Log Sin</i> $\beta$ | 9.9534565 | 9.9531786  | 9.9734162  | 9.9856278  | 9.9959011  | 9.9998916  |
| <i>Log Cos</i> $\phi$  | 9.9999338 | 9.9976143  | 9.9904044  | 9.9849438  | 9.9805963  | 9.9790192  |
| <i>Cos</i> PC          | 9.9533903 | 9.9557929  | 9.9638206  | 9.9705716  | 9.9764974  | 9.9789108  |
| PC =                   | 26°4'22"4 | 25°24'56"1 | 23°3'49"4  | 20°51'18"8 | 18°40'48"3 | 17°42'41"4 |

De overige waarden van P en PC worden in tabel G gevonden.

De gevondene waarden voor den hoek P en de zijde PC, van iederen bolvormigen driehoek  $PC_{n-1}P_n$  kunnen, dewijl in ieder van deze twee zijden  $PC_{n-1}$  en  $PC_n$  en de ingesloten hoek  $P_n - P_{n-1}$  bekend zijn, gebruikt worden om den inhoud van ieder dezer driehoeken, door middel van hunne spherische excessen, te berekenen.

Het is namelijk uit de bolvormige driehoeksmeting bekend, dat de inhoud van iederen bolvormigen driehoek tot dien van het spherisch octant dezelfde verhouding heeft als zijn spherisch excès tot een rechten hoek. Stelt  $I$  den inhoud van een bolvormigen driehoek,  $\Delta$  dien van het spherisch octant, en  $\varepsilon$  het spherisch excès voor, dan is

$$I : \Delta = \varepsilon : 90^\circ, \text{ of } I = \frac{90}{\varepsilon} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

of, wel, wanneer  $A, B, C$  de hoeken van den driehoek beteekenen

$$I = \frac{(A + B + C) - 180^\circ}{90^\circ} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

Het spherisch excès  $\varepsilon$ , dat onmiddellijk van de grootte der hoeken eens bolvormigen driehoeks afhangt, zal dus gevonden worden, wanneer men  $180^\circ$  van de som dier hoeken aftrekt. Zijn de gegevens van een driehoek andere dan de drie hoeken, in ons geval twee zijden en de ingesloten hoek, dan vindt men  $\varepsilon$  door de formule

$$\cot \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cdot \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C},$$

$$\text{welke, door te stellen } \frac{\cot \frac{1}{2} a \cdot \cot \frac{1}{2} b}{\cos C} = Tg^2 \mu,$$

tot dezen, beter voor de berekening geschikt, vorm wordt omgezet

$$Tg \frac{1}{2} \epsilon = Tg C \cos^2 \mu \dots \dots \dots (24)$$

Hoewel deze formule eenvoudig genoeg voor de bewerking is, geven wij toch aan de eerste de voorkeur, namelijk, aan het berekenen der beide overige hoeken van den driehoek. Daartoe hebben wij niets anders noodig dan de som der beide overige hoeken, en kunnen wij volstaan met de berekening van de eerste formule der Neperiaansche analogiën

$$Tg \frac{1}{2} (C_{n-1} + C_n) = \frac{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} - PC_n)}{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} + PC_n)} \cot \frac{1}{2} (P_n - P_{n-1}) \dots (25)$$

Wanneer wij de waarden van SC uit tabel F, voor waarden van  $\phi$  van 10 tot 10' wilden interpoleren, en voor deze in tabel E de overeenkomstige waarden van  $\beta$  zoeken, en verder, voor al die waarden van  $\phi$ , P en PC uit tabel G interpoleren, dan zouden wij de geheele bedekte oppervlakte der zon in 112 bolvormige driehoeken verdeelen.

Het komt ons echter voor, dat de nauwkeurigheid ver genoeg voortgezet zal zijn, zoo wij ons voor de berekening van den inhoud bepalen tot de waarden van  $\phi$ , in tabel F aangenomen, in welk geval er nog 39 bolvormige driehoeken te berekenen zijn; welker inhouden dan wellicht met minder moeite tot elken gewenschten graad van nauwkeurigheid kunnen geïnterpoleerd worden.

Deze laatste verdeling in 39 driehoeken behoudende, zoeken wij eerst de elementen derzelfde uit tabel G, welke wij in tabel H mededeelen, om dan daarmede met behulp der formule (25), de halve som der onbekende hoeken te berekenen. Tabel H bevat nog in hare laatste kolommen de sinus-versussen zoowel der enkele zijden als die van hunne gemiddelde waarden, welke wij later noodig zullen hebben.

Ziehier de berekening van het spherisch exces  $\epsilon$ .

| Driehoek N°.                                     | 1            | 7              | 13             | 22             | 31             | 39             |
|--------------------------------------------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\frac{1}{2} (PC_0 - PC_1) =$                    | 0° 0' 33" 4  | 0° 7' 41" 4    | 0° 6' 1" 8     | 0° 9' 22" 6    | 0° 6' 38" 2    | 0° 0' 59" 7    |
| $\frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) =$                    | 26 4 55 7    | 25 17 15 8     | 22 57 47 7     | 20 41 56 5     | 18 34 10 2     | 17 41 44 7     |
| $\frac{1}{2} (P_1 - P_0) =$                      | 1 1 20 0     | 1 11 14 3      | 0 38 37 2      | 1 10 0 2       | 1 30 20 1      | 1 38 53 5      |
| <i>Log Cos <math>\frac{1}{2}</math> verschil</i> | 0.0000000    | 9.9999989      | 9.9999993      | 9.9999984      | 9.9999992      | 0.0000000      |
| <i>Log Sec <math>\frac{1}{2}</math> som</i>      | 0.0466432    | 0.0437499      | 0.0358558      | 0.0289794      | 0.0232199      | 0.0210511      |
| <i>Log Cot <math>\frac{1}{2}</math> P =</i>      | 1.7485312    | 1.6834981      | 1.9494433      | 1.6910949      | 1.5803179      | 1.5409946      |
|                                                  | 1.7951744    | 1.7272469      | 1.9852984      | 1.7200727      | 1.6035370      | 1.5620457      |
| $\frac{1}{2} (C + C) =$                          | 89° 4' 54.68 | 88° 55' 35" 18 | 89° 24' 26" 53 | 88° 54' 30" 84 | 88° 34' 21" 95 | 88° 25' 47" 10 |
| $\frac{1}{2} P =$                                | 1 1 20.00    | 1 11 14 30     | 0 38 37 20     | 1 30 0 20      | 1 30 20 10     | 1 38 53 50     |
| $90^\circ + \frac{1}{2} \epsilon =$              | 90 6 14 68   | 90 6 49 48     | 90 3 3 73      | 90 4 31 04     | 90 4 42 05     | 90 4 40 60     |
| $\epsilon$                                       | 12' 29" 36   | 13' 38" 96     | 6' 7" 46       | 9' 2" 08       | 9' 24" 10      | 9' 21" 20      |



Door op deze wijze de bewerkingen voort te zetten hebben wij de spherische excessen van al de 39 driehoeken verkregen.

Tabel I. *Spherische excessen der 39 bolvormige driehoeken.*

| n <sup>o</sup> . | ε          | n <sup>o</sup> . | ε          | n <sup>o</sup> . | ε        | n <sup>o</sup> . | ε         | n <sup>o</sup> . | ε           |
|------------------|------------|------------------|------------|------------------|----------|------------------|-----------|------------------|-------------|
| 1                | 12' 29" 36 | 9                | 14' 47" 24 | 17               | 7' 0" 00 | 25               | 5' 39" 60 | 33               | 14' 20" 80  |
| 2                | 12 32 78   | 10               | 15 21 50   | 18               | 7 17 56  | 26               | 6 0 04    | 34               | 3 35 08     |
| 3                | 12 38 26   | 11               | 16 15 30   | 19               | 7 37 52  | 27               | 6 28 18   | 35               | 4 2 80      |
| 4                | 12 47 80   | 12               | 17 23 22   | 20               | 8 0 98   | 28               | 6 55 86   | 36               | 4 45 46     |
| 5                | 12 58 58   | 13               | 6 7 46     | 21               | 8 28 86  | 29               | 7 32 36   | 37               | 5 55 06     |
| 6                | 13 17 40   | 14               | 6 18 26    | 22               | 9 2 08   | 30               | 8 18 54   | 38               | 9 11 86     |
| 7                | 13 38 96   | 15               | 6 30 78    | 23               | 9 44 14  | 31               | 9 24 10   | 39               | 9 21 20     |
| 8                | 14 5 84    | 16               | 6 45 00    | 24               | 10 32 58 | 32               | 11 9 42   | 1-39             | 374' 21" 82 |

D. *Berekening van den inhoud van het bedekte gedeelte der zon en zijne verhouding tot de geheele zichtbare oppervlakte voor den aangenomen afstand der middelpunten.*

Zooals wij reeds hebben opgemerkt, is het halve bedekte gedeelte der zon  $TBC_0T$ , fig. 4, ingesloten door een boog van een grooten cirkel  $C_0T$ , door een boog van een kleinen cirkel  $TB$ , en door eene spherische lijn  $C_0B$ , de doorsnede van het kegelvlak der maan met de oppervlakte der zon, — van welke kromme wij de vergelijking niet kennen, maar die wij aanvankelijk door 39 bogen van groote cirkels hebben vervangen. Dit bedekte gedeelte maakt een deel uit van de oppervlakte  $PBC_0P$ , welke wij in bolvormige driehoeken hebben verdeeld, en verschilt daarvan de oppervlakte van den bijgevoegden driehoek  $PBT$ . De laatstgenoemde driehoek is wederom gelijk aan het verschil van den zuiveren bolvormigen driehoek  $PBS$ , en het bolvormig segment  $BST$ , zoodat wij hebben

$$Inh. TBC_0 = Inh. PBC_0 - (Inh. PBS - Inh. TBS).$$

Dewijl nu  $PBS$  en  $TBS$  nauwkeurig uit de gegevens kunnen berekend worden, zoo zullen wij ons eerst bezig houden met het vinden van den inhoud  $PBC_0$ .

Genoemde inhoud kan nu op verschillende wijzen bepaald worden, naar gelang men voor de lijntjes, die de deelpunten  $C_0, C_1, C_2, \dots B$  onderling verbinden, den een of anderen vorm meent te mogen aannemen.

In de eerste plaats kan men de strooken, waarin wij de oppervlakte verdeeld hebben, beschouwen als zoovele bolvormige segmenten, waarvan de hoeken aan de pool gelijk zijn aan de in tabel H gevondene hoeken P, en waarvan de boog het gemiddelde der zijden  $PC_0$  en  $PC_1$ ,  $PC_1$  en  $PC_2$  enz. bedraagt; alsdan neemt men voor de verbindingslijntjes  $C_0C_1$  enz. kleine cirkels aan.

Ten anderen kunnen wij elke strook  $PC_0C_1$  verdeelen in een segment  $PC_0C'$ , dat ontstaat, wanneer men uit P met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een boog beschrijft, die de grootste zijde  $PC_1$  in  $C'$  snijdt, en in een driehoekje  $C_0C'C_1$ , hetwelk dan op een plat vlak moet worden overgebracht.

Dat driehoekje zal rechthoekig zijn, en zijn inhoud kan gevonden worden, hetzij men zijne schuine zijde, ontwikkeld zijnde, als eene rechte lijn, hetzij als eene parabolische kromme van hoogere orde beschouwt.

Ten derde, wanneer de boogjes  $C_0C_1$ , enz. als bogen van groote cirkels worden aangenomen, alsdan moeten alle strooken als bolvormige driehoeken behandeld worden.

1°. *De strooken beschouwd als segmenten met gemiddelde zijden tot boog.*

Noemen wij  $I$  den inhoud van het bolvormig segment, en  $R$  den straal van den bol, dan is

$$I = 2\pi R \times R \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \times \frac{\angle C_0PC_1}{360^\circ} = \\ = \pi R^2 \times \frac{\angle C_0PC_1}{180^\circ} \times \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \dots (26)$$

Ten einde aan de eene zijde te groote getallen, en aan de andere zijde te veel nullen achter het decimaalteeken te vermijden, nemen wij de minuut als eenheid aan; zoodat  $R = 3437'74677$  moet genomen worden. Hierdoor verandert de laatste formule in de volgende

$$I = \frac{\pi}{180^\circ} \times (3437'74677)^2 \times \angle C_0PC_1 \times \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) (26')$$

of, de factor in logarithmen overgebracht en de hoeken  $C_0PC$  en  $180^\circ$ , in seconden uitgedrukt, verkrijgt men

$$\begin{array}{ll} 2 \text{ Log } R = 2 \times 3.5362739 & = 7.0725478 \\ \text{Log } \pi & = 0.4971499 \\ \text{Colog } 180 \times 3600'' & = 4.1884250 - 10 \\ \text{Log coëfficient} & = 1.7581227 \end{array}$$

dus 
$$\text{Log } I = 1.7581227 + \text{Log Sinvers } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) + \text{Log } \angle C_0 PC_1 \text{ (in seconden) } \dots \dots \dots (26')$$

In tabel H worden in de kolom met  $P_1 - P_0$  aan het hoofd de waarden der hoeken  $C_0 PC_1$ , en in de vóórlaatste kolom de sinver-  
sussen van  $\frac{1}{2} (PC_0 + PC_1)$  opgegeven. De berekening van  $I$  gaat  
nu gemakkelijk en aldus

| N°.                                          | 1         | 7         | 13        | 22        | 31        |
|----------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\angle C_0 PC_1$                            | 7359'9    | 8548'6    | 4634'3    | 8400'3    | 10840'1   |
| $\text{Log } C_0 PC_1$                       | 3.8668719 | 3.9318950 | 3.6659841 | 3.9242948 | 4.0350333 |
| $\text{Log Sinv } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1)$ | 9.0078971 | 8.9814834 | 8.8989664 | 8.8098962 | 8.7165208 |
| $\text{Log Sinv coefficient}$                | 1.7581227 | 1.7581227 | 1.7581229 | 1.7581227 | 1.7581227 |
| $\text{Log } I$                              | 4.6328917 | 4.6715011 | 4.3280734 | 4.4923137 | 4.5096768 |
| $I =$                                        | 42942.93  | 46935.47  | 21041.33  | 31068.03  | 32335.20  |

Op deze wijze zijn de inhouden van alle 39 bolvormige segmenten berekend, waarvan de uitkomsten in de volgende tabel K gevonden worden.

Tabel K. *Inhouden der bolvormige segmenten.*

| N°. | Inhoud.  | N°. | Inhoud.  | N°. | Inhoud.  | N°.  | Inhoud.    |
|-----|----------|-----|----------|-----|----------|------|------------|
| 1   | 42942'93 | 11  | 55912'16 | 21  | 29169'70 | 31   | 32335'29   |
| 2   | 43109 24 | 12  | 59813 24 | 22  | 31068 03 | 32   | 38378 92   |
| 3   | 43459 15 | 13  | 21041 33 | 23  | 33480 26 | 33   | 49486 37   |
| 4   | 43997 03 | 14  | 21678 70 | 24  | 36389 43 | 34   | 12325 65   |
| 5   | 44748 10 | 15  | 22396 22 | 25  | 19454 84 | 35   | 13920 00   |
| 6   | 45699 92 | 16  | 23189 98 | 26  | 20629 30 | 36   | 16289 86   |
| 7   | 46935 47 | 17  | 24070 00 | 27  | 22087 57 | 37   | 20346 88   |
| 8   | 48539 03 | 18  | 25073 44 | 28  | 23834 87 | 38   | 31640 04   |
| 9   | 50411 08 | 19  | 26218 57 | 29  | 25926 26 | 39   | 32171 30   |
| 10  | 52826 95 | 20  | 27563 03 | 30  | 28471 40 | 1—39 | 1287031.54 |

De inhouden dezer 39 driehoekjes bij elkander geteld, verkrijgt men voor hunne som den gevraagden inhoud van

$$PBC_0 = 1,286,031'54 \square \text{ minuten.}$$

De vorm der formule (26) geeft wel aanleiding, om den inhoud van een bolvormig segment als eene volkomen ontwikkelbare oppervlakte op een plat vlak over te brengen. Immers zij bestaat uit

twee factoren  $1^{\circ} . 2\pi R \times \frac{\angle C_0 PC_1}{360}$ , dat is, een gedeelte van den omtrek van den grooten cirkel van den bol, en  $2^{\circ} . R \text{ Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1)$ , dat is de sinusversus van den boog van het segment; en daar deze beide factoren zich in dezelfde eenheid laten uitdrukken, zoo zal de oppervlakte van elk bolvormig segment kunnen voorgesteld worden door een op schaal geteekenden platten rechthoek. Alle onze 39 bolvormige segmenten zullen dan zoovele rechthoeken kunnen voorstellen, met den eersten factor als grondlijnen of abcissen en met den tweeden als opstaande zijden of ordinaten; en wanneer wij nu al die grondlijnen naast elkander op eene rechte lijn plaatsen, en dus ook de rechthoeken, die ook verschillende hoogten hebben, dan zal de fig. 5 den geheelen inhoud  $PBC_0$ , op een plat vlak ontwikkeld, voorstellen. De geheele basis van de aldus ontstane figuur zal dan,  $R$  weder in minuten uitdrukkende, gelijk zijn aan  $2\pi R \times \frac{\angle PBC_0}{360} = 2\pi \times 3437'.74677 \times \frac{89^{\circ}5'7''}{360}$  (tabel G) =  $5345'12$ , de hoogte van den eersten rechthoek =  $R \times \text{Sinvs } 26^{\circ}4'55''7 = 3437'.74677 \times 0.101825 = 349'963$ ; en die van den laatsten =  $3437'.74677 \times 0.047316 = 161'610$ . Nemen wij nu, om de figuur te teekenen, bijv. voor iedere 1000' van de basis eene lengte van 25 mm., en, ten einde de kromte der lijn beter te doen uitkomen, voor iedere 100' der hoogte eene lengte van 50 mm, dan ontstaat figuur 5, waarin al de 39 segmenten afgekort, om ruimte te winnen, naast elkander voorkomen.

## 2°. De strooken verdeeld in segmenten en driehoekjes.

Wanneer wij in elke strook  $C_0 PC_1$  uit de pool  $P$  met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een cirkelboogje beschrijven, die de langste zijde  $PC_1$  in  $C'$  ontmoet, dan verdeelen wij die allen in segmenten met hunne kleinste zijden tot boog, en in een driehoekje  $C_0 C_1 C'$ . De inhouden van de achtereenvolgende segmenten worden dan op de zoo even aangewezen manier, doch met de kleinste zijde als boog, nauwkeurig gevonden; doch de inhouden der driehoekjes, — daar voor deze geene formule op den bol te vinden is, en zij dus ook niet volkomen op een plat vlak kunnen worden uitgelegd —, moeten door benadering gevonden worden.

Berekenen wij eerst de inhouden der segmenten. Hiertoe moeten wij nemen de sinus-versussen der kleinste bogen van elken driehoek,

welker waarden in de laatste kolom van tabel H gevonden worden. De berekening geschiedt weder volgens formule (26<sup>b</sup>).

*Tabel L. Inhouden der bolvormige segmenten.*

| N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.    |
|------------------|----------|------------------|----------|------------------|----------|------------------|------------|
| 1                | 42912'99 | 11               | 54817'04 | 21               | 28757'11 | 31               | 31954'57   |
| 2                | 43021 37 | 12               | 58436 57 | 22               | 30606 47 | 32               | 37899 28   |
| 3                | 43313 16 | 13               | 20860 24 | 23               | 32943 68 | 33               | 48830 72   |
| 4                | 43779 58 | 14               | 21480 97 | 24               | 35763 03 | 34               | 12292 25   |
| 5                | 44441 34 | 15               | 22179 57 | 25               | 19278 30 | 35               | 13877 17   |
| 6                | 45328 52 | 16               | 22951 80 | 26               | 20435 07 | 36               | 16236 77   |
| 7                | 46466 72 | 17               | 23809 33 | 27               | 21869 67 | 37               | 20283 60   |
| 8                | 47896 83 | 18               | 24784 90 | 28               | 23587 18 | 38               | 31530 35   |
| 9                | 49697 42 | 19               | 25897 99 | 29               | 25645 81 | 39               | 32114 86   |
| 10               | 51947 07 | 20               | 27211 00 | 30               | 28142 56 | 1-39             | 1273282.86 |

*Berekening van de inhouden der driehoekjes.*

Leggen wij zooveel doenlijk de overgeblevene driehoekjes op een plat vlak neêr, dan zullen zij, dewijl de zijden der segmenten loodrecht op hunne basissen staan, ook rechthoekige driehoekjes moeten vormen, wier basissen, ontwikkeld, gelijk zijn aan den boog van den kleinen cirkel, die ook de bogen der segmenten vormt, en wier hoogten, mede ontwikkeld, gelijk zijn aan het verschil der zijden van iedere strook of segment; derhalve hunnen

$$\text{Inhoud} = (L C_0 PC_1 \times \sin PC_1) \times \frac{1}{2} (PC_0 - PC_1).$$

Voor de inhouden dezer driehoekjes, als zoodanig beschouwd, vinden wij in tabel M de volgende waarden.

*Tabel M. Inhoud der rechthoekige driehoekjes.*

| N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. |
|------------------|---------|------------------|---------|------------------|---------|------------------|---------|
| 1                | 30'01   | 11               | 1092'23 | 21               | 411'14  | 21               | 379'60  |
| 2                | 88 24   | 12               | 1368 30 | 22               | 460 42  | 32               | 478 21  |
| 3                | 150 45  | 13               | 180 95  | 23               | 533 10  | 33               | 654 37  |
| 4                | 217.00  | 14               | 197 35  | 24               | 623 57  | 34               | 33 99   |
| 5                | 289 50  | 15               | 216 03  | 25               | 174 44  | 35               | 39 56   |
| 4                | 370 46  | 16               | 237 44  | 26               | 193 33  | 36               | 48 19   |
| 7                | 464 31  | 17               | 260 21  | 27               | 217 75  | 37               | 62 48   |
| 8                | 575 43  | 18               | 287 67  | 28               | 246 69  | 38               | 109 35  |
| 9                | 709 93  | 19               | 319 55  | 29               | 280 01  | 39               | 56 19   |
| 10               | 876 11  | 20               | 350 76  | 30               | 317 25  | 1-39             | 136.02  |

De voorgaande berekening van de inhouden der driehoekjes, als plat en rechthoekig beschouwd, mogen wij niet als nauwkeurig genoeg houden, dewijl wij daardoor van de onderstelling zijn uitgegaan, dat hunne schuine zijden rechte lijnen zijn. De loop der kromme lijn van figuur 5 doet immers zien, dat wij die onderstelling, vooral niet bij het begin en het einde der kromme mogen aannemen, maar dat wij de schuine lijnen der driehoekjes moeten vervangen door kromme lijnen. Wij komen alzoo tot het vraagstuk om den inhoud eener vlakke kromme lijn bij benadering te vinden.

Zooals men weet, beschouwt men voor dat doel, de kromme als eene parabool van hoogere macht, en neemt men tot gemak der berekening alle opvolgende abcissenverschillen aan elkander gelijk; voor welke abcissen dan de ordinaten der kromme moeten bekend zijn. Alvorens wij dus tot de inhoudvinding van onze driehoekjes kunnen overgaan, is het allereerst noodig, dat wij de waarden van de hoeken P of der deelen van de basis van ieder der segmenten afzonderlijk even groot maken, en daarna voor elk dier abcissen de overeenkomstige waarden der ordinaten berekenen.

Deze bewerking geeft de gelegenheid aan de hand om de nauwkeurigheid der inhoudsvinding binnen veel engere grenzen te brengen dan wij tot hertoe gedaan hebben, dewijl daardoor het aantal deelen, waarin elke basis verdeeld wordt, meer en meer vergroot wordt. Het komt ons voor, dat wij ons doel, eenen genoegzamen graad van nauwkeurigheid, zullen bereiken, wanneer wij ons voor de verdeeling bepalen tot iedere 10' boogs van  $\phi$ , alzoo dat elk der bogen van 0 tot 1°, van 1—2° ... en van 11 tot 12° nog in zes; en de bogen 12° tot 12° 20', enz. ... en van 15° 40' tot 16° nog in twee gelijke deelen worden verdeeld; door welke onderverdeeling onze kromme lijn van figuur 5, in 112 punten verdeeld wordt. Ware PC in functie van P gegeven, dan zou het eenvoudiger geweest zijn, de hoeken P van ieder der hierboven genoemde driehoeken in 6 of in 2 gelijke deelen te verdeelen, en voor die tusschenwaarden de PC of de ordinaten volgens de alsdan bestaande formule te berekenen. Nu echter kunnen wij niet anders dan of met de nieuwe waarden van  $\phi$  die grootheden P en PC volgens formule 20° onmiddellijk berekenen, of die door interpolatiën vinden. Wij hebben de laatste bewerking als de eenvoudigste verkozen, en zoeken, uit de gegevens van tabel G, de tusschenwaarden van P en PC, door eerst in de helft, en later in drieën te interpoleeren. Wij vinden dan

punten zullen snijden; en dan zou het hoogst moeilijk zijn, den inhoud van  $SC_0B$ , op wat manier ook, te bepalen.

Om alle welke redenen wij het vinden van den inhoud  $SC_0B$  door middel eener integraalformule hebben moeten opgeven.

*C. Voorbereidende berekening tot het vinden van den inhoud der bedekte oppervlakte.*

Nu geene der aangewende methoden van integratie ons hebben geleid tot het vinden van den bewusten inhoud, bleef ons niets anders over dan de bepaling van dien inhoud door verdecking der oppervlakte in driehoekjes. Tevens moesten wij eene methode aanwenden die voor alle gevallen, die in het vraagstuk kunnen voorkomen, aanwendbaar was.

Deze methode bestond daarin, dat wij eene oppervlakte berekenen, die niet zooals de driehoek  $C_0SC$  somtijds onmogelijk te berekenen was, maar een driehoek, die bij alle afstanden der middelpunten berekend konde worden; en deze is de driehoek  $TC_0B$ , dezelfde driehoek, wiens inhoud wij kennen moeten.

Tot dat einde hebben wij den hoek  $ST$  (fig. 4) tot  $90^\circ$  in  $P$  verlengd, en door  $P$  en  $B$  een hoek  $PB$  van een grooten cirkel getrokken. Alsdan is inhoud

$$TC_0B = PC_0B - PTB = PC_0B - (PSB - TSB) \dots (19)$$

Dewijl nu de hoek  $C_0PB$  blijkbaar eene functie van twee der elementen  $\Phi$  en  $\beta$  van den driehoek  $SC_0B$  moet zijn, en wij de laatste oppervlakte te bezwarend gevonden hebben om te integreeren, zoo kan er des te minder sprake zijn van eene integratie der oppervlakte  $PC_0B$ , en schiet er dus ten laatste niets anders over dan deze in een aantal driehoekjes te verdeelen, en van ieder dezer driehoekjes den inhoud te zoeken. Daartoe brengen wij door alle punten  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ , en de pool  $P$ , bogen van grooten cirkels, die daardoor de oppervlakte  $PC_0B$  in even zoo vele driehoekjes verdeelen, wier twee zijden bogen van grooten cirkels, en de derde zijden deelen uitmaken van de kromme  $C_0B$  van doorsnijding.

Om de elementen van deze driehoeken, waardoor hunne inhouden bepaald kunnen worden, te vinden, moeten wij eerst bekend hebben de hoeken  $P$  en de zijden  $PC$  van elken driehoek  $C_1PC_2$ , enz.; deze grootheden worden op de volgende wijze gevonden.

In elk der driehoeken  $SPC$  zijn gegeven  $SP = 90^\circ$ ,  $SC = \beta$  uit tabel  $B$ , en de ingesloten hoek  $PSC = \Phi$ ; de waarde van  $\beta$  is

daarbij eene functie van  $SC$  in  $\phi$  (tabel F). Door deze gegevens worden de onbekende grootheden  $P$  en  $PC$  door een der beide volgende stellen formules berekend.

Laat men uit eenig punt  $C$ , fig. 4, een loodrechten boog  $CD$  op de basis  $SP$  neêr, die deze in het punt  $D$  in twee stukken  $SD = \gamma$  en  $PD = 90^\circ - \gamma$  snijdt, dan heeft men

$$Tg SD = Tg SC \cdot Cos S,$$

$$Sin SD : Sin PD = Cot S : Cot P,$$

en

$$Cos SD : Cos PD = Cos SC : Cos PC,$$

of wel

$$Tg \gamma = Tg \beta \cdot Cos \phi,$$

$$\left. \begin{aligned} Sin \gamma : Sin(90^\circ - \gamma) &= Cot \phi : Cot P \quad \text{of} \quad Cot P = Cot \gamma \cdot Cot \phi, \\ Cos \gamma : Cos(90^\circ - \gamma) &= Cos \beta : Cos PC \quad \text{of} \quad Cos PC = Tg \gamma \cdot Cos \beta. \end{aligned} \right\} (20)$$

Brengt men de waarde van  $Tg \gamma = Tg \beta \cdot Cos \phi$  in de beide laatste over, dan komt er

$$Cot P = \frac{Cot \beta}{Sin \phi} \quad \text{en} \quad Cos PC = Sin \beta \cdot Cos \phi; \dots (20^a)$$

of wel, met behulp der Neperiaansche analogiën,

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2}(C + P) &= \frac{Cos \frac{1}{2}(SP - SC)}{Cos \frac{1}{2}(SP + SC)} \cdot Cot \frac{1}{2} S, \\ Tg \frac{1}{2}(C - P) &= \frac{Sin \frac{1}{2}(SP - SC)}{Sin \frac{1}{2}(SP + SC)} \cdot Cot \frac{1}{2} S, \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

$$\text{en } Tg \frac{1}{2} PC = Tg \frac{1}{2}(SP + SC) \frac{Cos \frac{1}{2}(C + P)}{Cos \frac{1}{2}(C - P)} = Tg \frac{1}{2}(SP - SC) \frac{Sin \frac{1}{2}(C + P)}{Sin \frac{1}{2}(C - P)},$$

of in plaats van deze laatste

$$Sin PC = \frac{Sin \phi}{Sin P} Sin SC.$$

Deze laatste formules ondergaan, door  $SP = 90^\circ$  daarin over te brengen, de volgende vereenvoudigingen

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2}(C + P) &= Tg \frac{1}{2}(90^\circ + \beta) \cdot Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2}(P - C) &= Cotg \frac{1}{2}(90^\circ + \beta) \cdot Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2} PC &= Cot \frac{1}{2}(90^\circ + \beta) \frac{Cos \frac{1}{2}(C + P)}{Cos \frac{1}{2}(C - P)}. \end{aligned} \right\} \dots (21^a)$$

De berekeningen volgens het eerste stel formules (20<sup>a</sup>) loopen spoediger af; zij volgen hier voor eenige waarden van  $\phi$ .



| $\phi =$               | 1°        | 6°         | 12°        | 15°        | 17°        | 17°40'     |
|------------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\beta =$              | 63°56'42" | 65°15'25"  | 70°9'24"   | 75°20'27"  | 82°8'26"   | 88°43'12"  |
| <i>Log Cot</i> $\beta$ | 9.6892390 | 9.6635684  | 9.5573588  | 9.4176104  | 9.1400052  | 8.3491597  |
| <i>Log Sin</i> $\phi$  | 8.2418553 | 9.0192346  | 9.3178789  | 9.4129962  | 9.4659353  | 9.4821283  |
| <i>Log Cot</i> P       | 1.4473837 | 0.6443338  | 0.2394799  | 0.0046142  | 9.6740699  | 8.8670314  |
| P =                    | 2°2'39"9  | 12°46'49"0 | 29°56'51"0 | 44°41'44"3 | 64°43'34"3 | 85°47'20"9 |
| <i>Log Sin</i> $\beta$ | 9.9534565 | 9.9581786  | 9.9734162  | 9.9856278  | 9.9959011  | 9.9998916  |
| <i>Log Cos</i> $\phi$  | 9.9999338 | 9.9976143  | 9.9904044  | 9.9849438  | 9.9805963  | 9.9790192  |
| <i>Cos</i> PC          | 9.9533903 | 9.9557929  | 9.9638206  | 9.9705716  | 9.9764974  | 9.9789108  |
| PC =                   | 26°4'22"4 | 25°24'56"1 | 23°3'49"4  | 20°51'18"8 | 18°40'48"3 | 17°42'41"4 |

De overige waarden van P en PC worden in tabel G gevonden.

De gevondene waarden voor den hoek P en de zijde PC, van iederen bolvormigen driehoek  $PC_{n-1}P_n$  kunnen, dewijl in ieder van deze twee zijden  $PC_{n-1}$  en  $PC_n$  en de ingesloten hoek  $P_n - P_{n-1}$  bekend zijn, gebruikt worden om den inhoud van ieder dezer driehoeken, door middel van hunne spherische excessen, te berekenen.

Het is namelijk uit de bolvormige driehoeksmeting bekend, dat de inhoud van iederen bolvormigen driehoek tot dien van het spherisch octant dezelfde verhouding heeft als zijn spherisch exces tot een rechten hoek. Stelt  $I$  den inhoud van een bolvormigen driehoek,  $\Delta$  dien van het spherisch octant, en  $\varepsilon$  het spherisch exces voor, dan is

$$I : \Delta = \varepsilon : 90^\circ, \text{ of } I = \frac{90}{\varepsilon} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

of, wel, wanneer  $A, B, C$  de hoeken van den driehoek beteekenen

$$I = \frac{(A + B + C) - 180^\circ}{90^\circ} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

Het spherisch exces  $\varepsilon$ , dat onmiddellijk van de grootte der hoeken eens bolvormigen driehoeks afhangt, zal dus gevonden worden, wanneer men  $180^\circ$  van de som dier hoeken aftrekt. Zijn de gegevens van een driehoek andere dan de drie hoeken, in ons geval twee zijden en de ingesloten hoek, dan vindt men  $\varepsilon$  door de formule

$$\cot \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cdot \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C},$$

welke, door te stellen  $\frac{\cot \frac{1}{2} a \cdot \cot \frac{1}{2} b}{\cos C} = Tg^2 \mu,$

tot dezen, beter voor de berekening geschikt, vorm wordt omgezet

$$Tg \frac{1}{2} s = Tg C \cos^2 \mu \dots \dots \dots (24)$$

Hoewel deze formule eenvoudig genoeg voor de bewerking is, geven wij toch aan de eerste de voorkeur, namelijk, aan het berekenen der beide overige hoeken van den driehoek. Daartoe hebben wij niets anders noodig dan de som der beide overige hoeken, en kunnen wij volstaan met de berekening van de eerste formule der Neperiaansche analogiën

$$Tg \frac{1}{2} (C_{n-1} + C_n) = \frac{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} - PC_n)}{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} + PC_n)} \cot \frac{1}{2} (P_n - P_{n-1}) \dots (25)$$

Wanneer wij de waarden van SC uit tabel F, voor waarden van  $\phi$  van 10 tot 10' wilden interpoleren, en voor deze in tabel E de overeenkomstige waarden van  $\beta$  zoeken, en verder, voor al die waarden van  $\phi$ , P en PC uit tabel G interpoleren, dan zouden wij de geheele bedekte oppervlakte der zon in 112 bolvormige driehoeken verdeelen.

Het komt ons echter voor, dat de nauwkeurigheid ver genoeg voortgezet zal zijn, zoo wij ons voor de berekening van den inhoud bepalen tot de waarden van  $\phi$ , in tabel F aangenomen, in welk geval er nog 39 bolvormige driehoeken te berekenen zijn; welker inhouden dan wellicht met minder moeite tot elken gewenschten graad van nauwkeurigheid kunnen geïnterpoleerd worden.

Deze laatste verdeling in 39 driehoeken behoudende, zoeken wij eerst de elementen derzelfde uit tabel G, welke wij in tabel H mede deelen, om dan daarmede met behulp der formule (25), de halve som der onbekende hoeken te berekenen. Tabel H bevat nog in hare laatste kolommen de sinus-versussen zoowel der enkele zijden als die van hunne gemiddelde waarden, welke wij later noodig zullen hebben.

Ziehier de berekening van het spherisch excess  $s$ .

| Driehoek N°.                                     | 1            | 7              | 13             | 22             | 31             | 39             |
|--------------------------------------------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\frac{1}{2} (PC_0 - PC_1) =$                    | 0° 0' 33" 4  | 0° 7' 41" 4    | 0° 6' 1" 8     | 0° 9' 22" 6    | 0° 6' 38" 2    | 0° 0' 59" 7    |
| $\frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) =$                    | 26 4 55 7    | 25 17 15 8     | 22 57 47 7     | 20 41 56 5     | 18 34 10 2     | 17 41 44 7     |
| $\frac{1}{2} (P_1 - P_0) =$                      | 1 1 20 0     | 1 11 14 3      | 0 38 37 2      | 1 10 0 2       | 1 30 20 1      | 1 38 53 5      |
| <i>Log Cos <math>\frac{1}{2}</math> verschil</i> | 0.0000000    | 9.9999989      | 9.9999993      | 9.9999984      | 9.9999992      | 0.0000000      |
| <i>Log Sec <math>\frac{1}{2}</math> som</i>      | 0.0466432    | 0.0437499      | 0.0358558      | 0.0289794      | 0.0232199      | 0.0210511      |
| <i>Log Cot <math>\frac{1}{2}</math> P =</i>      | 1.7485312    | 1.6834981      | 1.9494433      | 1.6910949      | 1.5803179      | 1.5409946      |
|                                                  | 1.7951744    | 1.7272469      | 1.9852984      | 1.7200727      | 1.6035370      | 1.5620457      |
| $\frac{1}{2} (C + C) =$                          | 89° 4' 54.68 | 88° 55' 35" 18 | 89° 24' 26" 53 | 88° 54' 30" 84 | 88° 34' 21" 95 | 88° 25' 47" 10 |
| $\frac{1}{2} P =$                                | 1 1 20.00    | 1 11 14 30     | 0 38 37 20     | 1 30 0 20      | 1 30 20 10     | 1 38 53 50     |
| $90^\circ + \frac{1}{2} s =$                     | 90 6 14 68   | 90 6 49 48     | 90 3 3 73      | 90 4 31 04     | 90 4 42 05     | 90 4 40 60     |
| $s$                                              | 12' 29" 36   | 13' 38" 96     | 6' 7" 46       | 9' 2" 08       | 9' 24" 10      | 9' 21" 20      |

Door op deze wijze de bewerkingen voort te zetten hebben wij de spherische excessen van al de 39 driehoeken verkregen.

Tabel I. *Spherische excessen der 39 bolvormige driehoeken.*

| n <sup>o</sup> . | ε           | n <sup>o</sup> . | ε           | n <sup>o</sup> . | ε         | n <sup>o</sup> . | ε          | n <sup>o</sup> . | ε            |
|------------------|-------------|------------------|-------------|------------------|-----------|------------------|------------|------------------|--------------|
| 1                | 12° 29' 36" | 9                | 14° 47' 24" | 17               | 7' 0" 00" | 25               | 5° 39' 60" | 33               | 14° 20' 80"  |
| 2                | 12 32 78    | 10               | 15 21 50    | 18               | 7 17 56   | 26               | 6 0 04     | 34               | 3 35 08      |
| 3                | 12 38 26    | 11               | 16 15 30    | 19               | 7 37 52   | 27               | 6 28 18    | 35               | 4 2 80       |
| 4                | 12 47 80    | 12               | 17 23 22    | 20               | 8 0 98    | 28               | 6 55 86    | 36               | 4 45 46      |
| 5                | 12 58 58    | 13               | 6 7 46      | 21               | 8 28 86   | 29               | 7 32 36    | 37               | 5 55 06      |
| 6                | 13 17 40    | 14               | 6 18 26     | 22               | 9 2 08    | 30               | 8 18 54    | 38               | 9 11 86      |
| 7                | 13 38 96    | 15               | 6 30 78     | 23               | 9 44 14   | 31               | 9 24 10    | 39               | 9 21 20      |
| 8                | 14 5 84     | 16               | 6 45 00     | 24               | 10 32 58  | 32               | 11 9 42    | 1-39             | 374° 21' 82" |

D. *Berekening van den inhoud van het bedekte gedeelte der zon en zijne verhouding tot de geheele zichtbare oppervlakte voor den aangenomen afstand der middelpunten.*

Zooals wij reeds hebben opgemerkt, is het halve bedekte gedeelte der zon  $TBC_0T$ , fig. 4, ingesloten door een boog van een grooten cirkel  $C_0T$ , door een boog van een kleinen cirkel  $TB$ , en door eene spherische lijn  $C_0B$ , de doorsnede van het kegelvlak der maan met de oppervlakte der zon, — van welke kromme wij de vergelijking niet kennen, maar die wij aanvankelijk door 39 bogen van groote cirkels hebben vervangen. Dit bedekte gedeelte maakt een deel uit van de oppervlakte  $PBC_0P$ , welke wij in bolvormige driehoeken hebben verdeeld, en verschilt daarvan de oppervlakte van den bijgevoegden driehoek  $PBT$ . De laatstgenoemde driehoek is wederom gelijk aan het verschil van den zuiveren bolvormigen driehoek  $PBS$ , en het bolvormig segment  $BST$ , zoodat wij hebben

$$Inh. TBC_0 = Inh. PBC_0 - (Inh. PBS - Inh. TBS).$$

Dewijl nu  $PBS$  en  $TBS$  nauwkeurig uit de gegevens kunnen berekend worden, zoo zullen wij ons eerst bezig houden met het vinden van den inhoud  $PBC_0$ .

Genoemde inhoud kan nu op verschillende wijzen bepaald worden, naar gelang men voor de lijntjes, die de deelpunten  $C_0, C_1, C_2, \dots B$  onderling verbinden, den een of anderen vorm meent te mogen aannemen.

In de eerste plaats kan men de strooken, waarin wij de oppervlakte verdeeld hebben, beschouwen als zoovele bolvormige segmenten, waarvan de hoeken aan de pool gelijk zijn aan de in tabel H gevondene hoeken P, en waarvan de boog het gemiddelde der zijden  $PC_0$  en  $PC_1$ ,  $PC_1$  en  $PC_2$  enz. bedraagt; alsdan neemt men voor de verbindingslijntjes  $C_0C_1$  enz. kleine cirkels aan.

Ten anderen kunnen wij elke strook  $PC_0C_1$  verdeelen in een segment  $PC_0C'$ , dat ontstaat, wanneer men uit P met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een boog beschrijft, die de grootste zijde  $PC_1$  in  $C'$  snijdt, en in een driehoekje  $C_0C'C_1$ , hetwelk dan op een plat vlak moet worden overgebracht.

Dat driehoekje zal rechthoekig zijn, en zijn inhoud kan gevonden worden, hetzij men zijne schuine zijde, ontwikkeld zijnde, als eene rechte lijn, hetzij als eene parabolische kromme van hoogere orde beschouwt.

Ten derde, wanneer de boogjes  $C_0C_1$ , enz. als bogen van groote cirkels worden aangenomen, alsdan moeten alle strooken als bolvormige driehoeken behandeld worden.

1°. *De strooken beschouwd als segmenten met gemiddelde zijden tot boog.*

Noemen wij  $I$  den inhoud van het bolvormig segment, en  $R$  den straal van den bol, dan is

$$I = 2\pi R \times R \text{ Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \times \frac{LC_0PC_1}{360^\circ} = \\ = \pi R^2 \times \frac{LC_0PC_1}{180^\circ} \times \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \dots (26)$$

Ten einde aan de eene zijde te groote getallen, en aan de andere zijde te veel nullen achter het decimaalteeken te vermijden, nemen wij de minuut als eenheid aan; zoodat  $R = 3437'74677$  moet genomen worden. Hierdoor verandert de laatste formule in de volgende

$$I = \frac{\pi}{180^\circ} \times (3437'74677)^2 \times LC_0PC_1 \times \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \quad (26')$$

of, de factor in logarithmen overgebracht en de hoeken  $C_0PC$  en  $180^\circ$ , in seconden uitgedrukt, verkrijgt men

$$\begin{array}{ll} 2 \text{ Log } R = 2 \times 3.5362739 & = 7.0725478 \\ \text{Log } \pi & = 0.4971499 \\ \text{Colog } 180 \times 3600'' & = 4.1884250 - 10 \\ \text{Log coëfficient} & = 1.7581227 \end{array}$$

dus 
$$\text{Log } I = 1.7581227 + \text{Log Sinvers } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) + \text{Log } \angle C_0 PC_1 \text{ (in seconden) } \dots \dots \dots (26^b)$$

In tabel H worden in de kolom met  $P_1 - P_0$  aan het hoofd de waarden der hoeken  $C_0 PC_1$ , en in de vóórlaatste kolom de sinversussen van  $\frac{1}{2} (PC_0 + PC_1)$  opgegeven. De berekening van  $I$  gaat nu gemakkelijk en aldus

| Nº.                                           | 1         | 7         | 13        | 22        | 31        |
|-----------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\angle C_0 PC_1$                             | 7359'9    | 8548'6    | 4634'3    | 8400'3    | 10840'1   |
| $\text{Log } C_0 PC_1$                        | 3.8668719 | 3.9318950 | 3.6659841 | 3.9242948 | 4.0350333 |
| $\text{Log Sinvs } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1)$ | 9.0078971 | 8.9814834 | 8.8989664 | 8.8098962 | 8.7165208 |
| $\text{Log Sinvs coefficient}$                | 1.7581227 | 1.7581227 | 1.7581229 | 1.7581227 | 1.7581227 |
| $\text{Log } I$                               | 4.6328917 | 4.6715011 | 4.3230734 | 4.4923137 | 4.5096768 |
| $I =$                                         | 42942.93  | 46935.47  | 21041.33  | 31068.03  | 32335.20  |

Op deze wijze zijn de inhouden van alle 39 bolvormige segmenten berekend, waarvan de uitkomsten in de volgende tabel K gevonden worden.

Tabel K. *Inhouden der bolvormige segmenten.*

| Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº.  | Inhoud.    |
|-----|----------|-----|----------|-----|----------|------|------------|
| 1   | 42942'93 | 11  | 55912'16 | 21  | 29169'70 | 31   | 32335'29   |
| 2   | 43109 24 | 12  | 59813 24 | 22  | 31068 03 | 32   | 33378 92   |
| 3   | 43459 15 | 13  | 21041 33 | 23  | 33480 26 | 33   | 49486 37   |
| 4   | 43997 03 | 14  | 21678 70 | 24  | 36389 43 | 34   | 12325 65   |
| 5   | 44748 10 | 15  | 22396 22 | 25  | 19454 84 | 35   | 13920 00   |
| 6   | 45699 92 | 16  | 23189 98 | 26  | 20629 30 | 36   | 16289 86   |
| 7   | 46935 47 | 17  | 24070 00 | 27  | 22087 57 | 37   | 20346 88   |
| 8   | 48539 03 | 18  | 25073 44 | 28  | 23834 87 | 38   | 31640 04   |
| 9   | 50411 08 | 19  | 26218 57 | 29  | 25926 26 | 39   | 32171 30   |
| 10  | 52826 95 | 20  | 27563 03 | 30  | 28471 40 | 1—39 | 1287031.54 |

De inhouden dezer 39 driehoekjes bij elkander geteld, verkrijgt men voor hunne som den gevraagden inhoud van

$$PBC_0 = 1,286,031'54 \square \text{ minuten.}$$

De vorm der formule (26) geeft wel aanleiding, om den inhoud van een bolvormig segment als eene volkomen ontwikkelbare oppervlakte op een plat vlak over te brengen. Immers zij bestaat uit

twee factoren  $1^{\circ} . 2\pi R \times \frac{\angle C_0 PC_1}{360}$ , dat is, een gedeelte van den

omtrek van den grooten cirkel van den bol, en  $2^{\circ} . R \text{ Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1)$ , dat is de sinusversus van den boog van het segment; en daar deze beide factoren zich in dezelfde eenheid laten uitdrukken, zoo zal de oppervlakte van elk bolvormig segment kunnen voorgesteld worden door een op schaal geteekenden platten rechthoek. Alle onze 39 bolvormige segmenten zullen dan zoovele rechthoeken kunnen voorstellen, met den eersten factor als grondlijnen of abscissen en met den tweeden als opstaande zijden of ordinaten; en wanneer wij nu al die grondlijnen naast elkander op eene rechte lijn plaatsen, en dus ook de rechthoeken, die ook verschillende hoogten hebben, dan zal de fig. 5 den geheelen inhoud  $PBC_0$ , op een plat vlak ontwikkeld, voorstellen. De geheele basis van de aldus ontstane figuur zal dan,  $R$  weder in minuten uitdrukkende, gelijk zijn aan

$$2\pi R \times \frac{\angle PBC_0}{360} = 2\pi \times 3437'.74677 \times \frac{89^{\circ}5'7''}{360} \text{ (tabel G)} = 5345'12,$$

de hoogte van den eersten rechthoek  $= R \times \text{Sinv } 26^{\circ}4'55''.7 = 3437'.74677 \times 0.101825 = 349'963$ ; en die van den laatsten  $= 3437'.74677 \times 0.047316 = 161'610$ . Nemen wij nu, om de figuur te teekenen, bijv. voor iedere 1000' van de basis eene lengte van 25 mm., en, ten einde de kromte der lijn beter te doen uitkomen, voor iedere 100' der hoogte eene lengte van 50 mm, dan ontstaat figuur 5, waarin al de 39 segmenten afgekort, om ruimte te winnen, naast elkander voorkomen.

## 2<sup>o</sup>. De strooken verdeeld in segmenten en driehoekjes.

Wanneer wij in elke strook  $C_0 PC_1$  uit de pool  $P$  met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een cirkelboogje beschrijven, die de langste zijde  $PC_1$  in  $C'$  ontmoet, dan verdeelen wij die allen in segmenten met hunne kleinste zijden tot boog, en in een driehoekje  $C_0 C_1 C'$ . De inhouden van de achtereenvolgende segmenten worden dan op de zoo even aangewezen manier, doch met de kleinste zijde als boog, nauwkeurig gevonden; doch de inhouden der driehoekjes, — daar voor deze geene formule op den bol te vinden is, en zij dus ook niet volkomen op een plat vlak kunnen worden uitgelegd —, moeten door benadering gevonden worden.

Berekenen wij eerst de inhouden der segmenten. Hiertoe moeten wij nemen de sinus-versussen der kleinste bogen van elken driehoek,

welker waarden in de laatste kolom van tabel H gevonden worden. De berekening geschiedt weder volgens formule (26').

*Tabel L. Inhouden der bolvormige segmenten.*

| Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº.  | Inhoud.    |
|-----|----------|-----|----------|-----|----------|------|------------|
| 1   | 42912'99 | 11  | 54817'04 | 21  | 28757'11 | 31   | 31954'57   |
| 2   | 43021 37 | 12  | 58436 57 | 22  | 30606 47 | 32   | 37899 28   |
| 3   | 43313 16 | 13  | 20860 24 | 23  | 32943 68 | 33   | 48830 72   |
| 4   | 43779 53 | 14  | 21480 97 | 24  | 35763 03 | 34   | 12292 25   |
| 5   | 44441 34 | 15  | 22179 57 | 25  | 19278 30 | 35   | 13877 17   |
| 6   | 45323 52 | 16  | 22951 80 | 26  | 20435 07 | 36   | 16236 77   |
| 7   | 46466 72 | 17  | 23809 33 | 27  | 21869 67 | 37   | 20283 60   |
| 8   | 47896 83 | 18  | 24784 90 | 28  | 23587 18 | 38   | 31530 35   |
| 9   | 49697 42 | 19  | 25897 99 | 29  | 25645 81 | 39   | 32114 86   |
| 10  | 51947 07 | 20  | 27211 00 | 30  | 28142 56 | 1-39 | 1273282.86 |

*Berekening van de inhouden der driehoekjes.*

Leggen wij zooveel doenlijk de overgeblevene driehoekjes op een plat vlak neêr, dan zullen zij, dewijl de zijden der segmenten loodrecht op hunne basissen staan, ook rechthoekige driehoekjes moeten vormen, wier basissen, ontwikkeld, gelijk zijn aan den boog van den kleinen cirkel, die ook de bogen der segmenten vormt, en wier hoogten, mede ontwikkeld, gelijk zijn aan het verschil der zijden van iedere strook of segment; derhalve hunnen

$$\text{Inhoud} = (\angle C_0 PC_1 \times \sin PC_1) \times \frac{1}{2} (PC_0 - PC_1).$$

Voor de inhouden dezer driehoekjes, als zoodanig beschouwd, vinden wij in tabel M de volgende waarden.

*Tabel M. Inhoud der rechthoekige driehoekjes.*

| Nº. | Inhoud. | Nº. | Inhoud. | Nº. | Inhoud. | Nº.  | Inhoud. |
|-----|---------|-----|---------|-----|---------|------|---------|
| 1   | 30'01   | 11  | 1092'23 | 21  | 411'14  | 21   | 379'60  |
| 2   | 88 24   | 12  | 1368 30 | 22  | 460 42  | 32   | 478 21  |
| 3   | 150 45  | 13  | 180 95  | 23  | 533 10  | 33   | 654 37  |
| 4   | 217.00  | 14  | 197 35  | 24  | 623 57  | 34   | 33 99   |
| 5   | 289 50  | 15  | 216 03  | 25  | 174 44  | 35   | 39 56   |
| 6   | 370 46  | 16  | 237 44  | 26  | 193 33  | 36   | 48 19   |
| 7   | 464 31  | 17  | 260 21  | 27  | 217 75  | 37   | 62 48   |
| 8   | 575 43  | 18  | 287 67  | 28  | 246 69  | 38   | 109 35  |
| 9   | 709 93  | 19  | 319 55  | 29  | 280 01  | 39   | 56 19   |
| 10  | 876 11  | 20  | 350 76  | 30  | 317 25  | 1-39 | 136.02  |

De voorgaande berekening van de inhouden der driehoekjes, als plat en rechthoekig beschouwd, mogen wij niet als nauwkeurig genoeg houden, dewijl wij daardoor van de onderstelling zijn uitgegaan, dat hunne schuine zijden rechte lijnen zijn. De loop der kromme lijn van figuur 5 doet immers zien, dat wij die onderstelling, vooral niet bij het begin en het einde der kromme mogen aannemen, maar dat wij de schuine lijnen der driehoekjes moeten vervangen door kromme lijnen. Wij komen alzoo tot het vraagstuk om den inhoud eener vlakke kromme lijn bij benadering te vinden.

Zooals men weet, beschouwt men voor dat doel, de kromme als eene parabool van hoogere macht, en neemt men tot gemak der berekening alle opvolgende abcissenverschillen aan elkander gelijk; voor welke abcissen dan de ordinaten der kromme moeten bekend zijn. Alvorens wij dus tot de inhoudvinding van onze driehoekjes kunnen overgaan, is het allereerst noodig, dat wij de waarden van de hoeken P of der deelen van de basis van ieder der segmenten afzonderlijk even groot maken, en daarna voor elk dier abcissen de overeenkomstige waarden der ordinaten berekenen.

Deze bewerking geeft de gelegenheid aan de hand om de nauwkeurigheid der inhoudsvinding binnen veel engere grenzen te brengen dan wij tot hiertoe gedaan hebben, dewijl daardoor het aantal deelen, waarin elke basis verdeeld wordt, meer en meer vergroot wordt. Het komt ons voor, dat wij ons doel, eenen genoegzamen graad van nauwkeurigheid, zullen bereiken, wanneer wij ons voor de verdeeling bepalen tot iedere 10' boogs van  $\phi$ , alzoo dat elk der bogen van 0 tot 1°, van 1—2° ... en van 11 tot 12° nog in zes; en de bogen 12° tot 12° 20', enz. ... en van 15° 40 tot 16° nog in twee gelijke deelen worden verdeeld; door welke onderverdeeling onze kromme lijn van figuur 5, in 112 punten verdeeld wordt. Ware PC in functie van P gegeven, dan zou het eenvoudiger geweest zijn, de hoeken P van ieder der hierboven genoemde driehoeken in 6 of in 2 gelijke deelen te verdeelen, en voor die tusschenwaarden de PC of de ordinaten volgens de alsdan bestaande formule te berekenen. Nu echter kunnen wij niet anders dan of met de nieuwe waarden van  $\phi$  die grootheden P en PC volgens formule 20° onmiddelijk berekenen, of die door interpolatiën vinden. Wij hebben de laatste bewerking als de eenvoudigste verkozen, en zoeken, uit de gegevens van tabel G, de tusschenwaarden van P en PC, door eerst in de helft, en later in drieën te interpoleeren. Wij vinden dan



Het tweede gedeelte  $N$  is gelijk de beide volgende

$$\begin{aligned} \int N d\phi &= \int \sqrt{r^2 - \rho^2 - a^2 \cos 2\phi + 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}} d\phi - \\ &\quad - \int \frac{1}{2} \{ \rho^2 + a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi} \} \times \\ &\quad \times \sqrt{r^2 - \rho^2 - a^2 \cos 2\phi + 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}} d\phi. \end{aligned}$$

Stellen wij, in plaats van den wortelvorm

$$\sqrt{1-p} = 1 - \frac{p}{2} - \frac{p^2}{8} - \frac{p^3}{16} - \dots, \dots (19')$$

dan komt er

$$\begin{aligned} (N_1) + \sqrt{r^2 - \rho^2} \int &\left\{ 1 - \frac{a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}}{2(r^2 - \rho^2)} - \right. \\ &\quad - \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^2}{8(r^2 - \rho^2)^2} - \\ &\quad \left. - \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^3}{16(r^2 - \rho^2)^3} \right\} d\phi - \\ &\quad - \int \frac{1}{2} (\rho^2 + a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}) \times \\ &\quad \times \sqrt{r^2 - \rho^2} \left\{ 1 - \frac{a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi}}{2(r^2 - \rho^2)} - \right. \\ &\quad - \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^2}{8(r^2 - \rho^2)^2} - \\ &\quad \left. - \frac{(a^2 \cos 2\phi - 2a \cos \phi \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \phi})^3}{16(r^2 - \rho^2)^3} \right\} d\phi. \end{aligned}$$

Het oplossen dezer integraalformule zou neerkomen op het berekenen van 33 nog al vrij samengestelde termen, onder verwaarloozing van de vierde en hogere machten der reeks, waarin  $\sqrt{1-p}$  (19') ontwikkeld is.

Heeft men de waarde van  $r \int \cos \beta d\phi$  gevonden, dan moet die nog door  $r$  gedeeld en dat quotient van  $\phi$  worden afgetrokken, om den inhoud te verkrijgen van het driehoekig stuk  $SC_0B$  (fig. 4).

Wij willen nu gaan onderzoeken, of deze integraalformule toegepast kan worden, 1° in het algemeen, of 2° in het bijzonder voor ons geval.

Voor eene algemeene toepasselijkheid moeten in de eerste plaats de coëfficiënten der onderscheidene termen kleiner en kleiner worden, hoe meer termen men van  $\sqrt{1-p}$  (19') neemt. Wij zien daade-

lijk, dat bijna al de termen zijn aangedaan door een coëfficiënt van den vorm  $\frac{a^n \rho^n}{(r^2 - \rho^2)^n}$ : en het zal dus hoofdzakelijk van de waarde van  $(r^2 - \rho^2)$  afhangen, of de reeks al dan niet convergeert. En al dadelijk zien wij in, dat daar  $r$  en  $\rho$  bijna aan elkander gelijk kunnen zijn,  $(r^2 - \rho^2)^n$  eene zeer kleine grootheid worden kan, en dus de breuk  $\frac{a^n \rho^n}{(r^2 - \rho^2)^n}$  in diezelfde en boven mate zal vergroot worden.

Stellen wij b. v.  $r = 1000''$  en  $\rho = 999''$  of  $r = 0.0048481868$   $\rho = 0.0048482886$  voor den straal  $= 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{dan is} \quad (r^2 - \rho^2)^1 &= 0.0000.0004.6992, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} &= 0.0002.1677.0850, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} &= 0. 0^{10}.1019, \\ (r^2 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} &= 0. 0^{12}.4787, \\ &\text{enz.} \end{aligned}$$

Daar nu de tellers der breuken,  $a$  en  $\rho$  standvastig blijvende, bij elke benadering hoogstens een tweede macht hooger klimmen, zoo zal deze integraalformule in het algemeen des te minder convergeren en zelfs divergeren, naarmate meer benaderingen aangewend worden.

Of nu de integraalformule ook in ons geval, namelijk voor  $r = 1000''$ ,  $\rho = 900''$  en  $a = 1800''$ , nog bruikbaar is, willen wij alleen wijzen op het toenemen van coëfficiënten der termen, die van de termen  $\frac{p^2}{8}$  en  $\frac{p^2}{16}$  en van de hoogere machten van  $\sqrt{1-p}$  afhangen, die wij niet noodig gevonden hebben verder te ontwikkelen.

Er doet zich tot eene algemeene toepassing dezer integraalformule, of beter gezegd tot het vinden van den inhoud van driehoek  $\triangle SO_0B$ , bovendien nog eene andere zwarigheid op. In fig. 8 is namelijk de stand der schijven van zon en maan zóó voorgesteld, dat de boog  $C_0B$  door alle bogen  $SC$  slechts in één punt gesneden wordt; in die gevallen, maar ook in die alleen, mag men stellen

$$TC_0B = TSB - C_0SB \dots\dots\dots (18)$$

Dit heeft echter niet altijd plaats, want, wanneer de middelpunten van zon en maan zich meer en meer naderen tot dat de maansrand bijna op het middelpunt der zon valt, dan komen daaronder standen voor, waarin enkele bogen  $C_0C$  den boog  $C_0B$  in twee

punten zullen snijden; en dan zou het hoogst moeilijk zijn, den inhoud van  $SC_0B$ , op wat manier ook, te bepalen.

Om alle welke redenen wij het vinden van den inhoud  $SC_0B$  door middel eener integraalformule, hebben moeten opgeven.

*C. Voorbereidende berekening tot het vinden van den inhoud der bedekte oppervlakte.*

Nu geene der aangewende methoden van integratie ons hebben geleid tot het vinden van den bewusten inhoud, bleef ons niets anders over dan de bepaling van dien inhoud door verdecking der oppervlakte in driehoekjes. Tevens moesten wij eene methode aanwenden die voor alle gevallen, die in het vraagstuk kunnen voorkomen, aanwendbaar was.

Deze methode bestond daarin, dat wij eene oppervlakte berekenen, die niet zooals de driehoek  $C_0SC$  somtijds onmogelijk te berekenen was, maar een driehoek, die bij alle afstanden der middelpunten berekend konde worden; en deze is de driehoek  $TC_0B$ , dezelfde driehoek, wiens inhoud wij kennen moeten.

Tot dat einde hebben wij den hoog  $ST$  (fig. 4) tot  $90^\circ$  in  $P$  verlengd, en door  $P$  en  $B$  een hoog  $PB$  van een grooten cirkel gebracht. Alsdan is inhoud

$$TC_0B = PC_0B - PTB = PC_0B - (PSB - TSB) \dots (19)$$

Derwijl nu de hoek  $C_0PB$  blijkbaar eene functie van twee der elementen  $\phi$  en  $\beta$  van den driehoek  $SC_0B$  moet zijn, en wij de laatste oppervlakte te bezwarend gevonden hebben om te integreeren, zoo kan er des te minder sprake zijn van eene integratie der oppervlakte  $PC_0B$ , en schiet er dus ten laatste niets anders over dan deze in een aantal driehoekjes te verdeelen, en van ieder dezer driehoekjes den inhoud te zoeken. Daartoe brengen wij door alle punten  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  en de pool  $P$ , bogen van grooten cirkels, die daardoor de oppervlakte  $PC_0B$  in even zoo vele driehoekjes verdeelen, wier twee zijden bogen van grooten cirkels, en de derde zijden deelen uitmaken van de kromme  $C_0B$  van doorsnijding.

Om de elementen van deze driehoeken, waardoor hunne inhouden bepaald kunnen worden, te vinden, moeten wij eerst bekend hebben de hoeken  $P$  en de zijden  $PC$  van elken driehoek  $C_1PC_2$ , enz.; deze grootheden worden op de volgende wijze gevonden.

In elk der driehoeken  $SPC$  zijn gegeven  $SP = 90^\circ$ ,  $SC = \beta$  uit tabel  $E$ , en de ingesloten hoek  $PSC = \phi$ ; de waarde van  $\beta$  is

daarbij eene functie van  $SC$  in  $\phi$  (tabel F). Door deze gegevens worden de onbekende grootheden  $P$  en  $PC$  door een der beide volgende stellen formules berekend.

Laat men uit eenig punt  $C$ , fig. 4, een loodrechten boog  $CD$  op de basis  $SP$  neêr, die deze in het punt  $D$  in twee stukken,  $SD = \gamma$  en  $PD = 90^\circ - \gamma$  snijdt, dan heeft men

$$Tg SD = Tg SC \cdot Cos S,$$

$$Sin SD : Sin PD = Cot S : Cot P,$$

en

$$Cos SD : Cos PD = Cos SC : Cos PC,$$

of wel

$$Tg \gamma = Tg \beta \cdot Cos \phi,$$

$$\left. \begin{aligned} Sin \gamma : Sin(90^\circ - \gamma) &= Cot \phi : Cot P \quad \text{of} \quad Cot P = Cot \gamma \cdot Cot \phi, \\ Cos \gamma : Cos(90^\circ - \gamma) &= Cos \beta : Cos PC \quad \text{of} \quad Cos PC = Tg \gamma \cdot Cos \beta. \end{aligned} \right\} (20)$$

Brengt men de waarde van  $Tg \gamma = Tg \beta \cdot Cos \phi$  in de beide laatste over, dan komt er

$$Cot P = \frac{Cot \beta}{Sin \phi} \quad \text{en} \quad Cos PC = Sin \beta \cdot Cos \phi; \dots (20^a)$$

of wel, met behulp der Neperiaansche analogiën,

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2}(C+P) &= \frac{Cos \frac{1}{2}(SP-SC)}{Cos \frac{1}{2}(SP+SC)} \cdot Cot \frac{1}{2} S, \\ Tg \frac{1}{2}(C-P) &= \frac{Sin \frac{1}{2}(SP-SC)}{Sin \frac{1}{2}(SP+SC)} \cdot Cot \frac{1}{2} S, \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

$$\text{en } Tg \frac{1}{2} PC = Tg \frac{1}{2}(SP+SC) \frac{Cos \frac{1}{2}(C+P)}{Cos \frac{1}{2}(C-P)} = Tg \frac{1}{2}(SP-SC) \frac{Sin \frac{1}{2}(C+P)}{Sin \frac{1}{2}(C-P)},$$

of in plaats van deze laatste

$$Sin PC = \frac{Sin \phi}{Sin P} Sin SC.$$

Deze laatste formules ondergaan, door  $SP = 90^\circ$  daarin over te brengen, de volgende vereenvoudigingen

$$\left. \begin{aligned} Tg \frac{1}{2}(C+P) &= Tg \frac{1}{2}(90^\circ + \beta) \cdot Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2}(P-C) &= Cotg \frac{1}{2}(90^\circ + \beta) \cdot Cot \frac{1}{2} \phi, \\ Tg \frac{1}{2} PC &= Cot \frac{1}{2}(90^\circ + \beta) \frac{Cos \frac{1}{2}(C+P)}{Cos \frac{1}{2}(C-P)}. \end{aligned} \right\} \dots (21^a)$$

De berekeningen volgens het eerste stel formuli (20<sup>a</sup>) loopen spoediger af; zij volgen hier voor eenige waarden van  $\phi$ .

| $\phi =$               | 1°        | 6°         | 12°        | 15°        | 17°        | 17°40'     |
|------------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\beta =$              | 63°56'42" | 65°15'25"  | 70°9'24"   | 75°20'27"  | 82°8'26"   | 88°43'12"  |
| <i>Log Cot</i> $\beta$ | 9.6892390 | 9.6635684  | 9.5573588  | 9.4176104  | 9.1400052  | 8.8491597  |
| <i>Log Sin</i> $\phi$  | 8.2418553 | 9.0192346  | 9.3178789  | 9.4129962  | 9.4659353  | 9.4821283  |
| <i>Log Cot</i> P       | 1.4473837 | 0.6443338  | 0.2394799  | 0.0046142  | 9.6740699  | 8.8670314  |
| P =                    | 2°2'39"9  | 12°46'49"0 | 29°56'51"0 | 44°41'44"3 | 64°43'34"3 | 85°47'20"9 |
| <i>Log Sin</i> $\beta$ | 9.9534565 | 9.9581786  | 9.9734162  | 9.9856278  | 9.9959011  | 9.9998916  |
| <i>Log Cos</i> $\phi$  | 9.9999338 | 9.9976143  | 9.9904044  | 9.9849438  | 9.9805963  | 9.9790192  |
| <i>Cos</i> PC          | 9.9533903 | 9.9557929  | 9.9638206  | 9.9705716  | 9.9764974  | 9.9789108  |
| PC =                   | 26°4'22"4 | 25°24'56"1 | 23°3'49"4  | 20°51'18"8 | 18°40'48"3 | 17°42'41"4 |

De overige waarden van P en PC worden in tabel G gevonden.

De gevondene waarden voor den hoek P en de zijde PC, van iederen bolvormigen driehoek  $PC_{n-1}P_n$  kunnen, dewijl in ieder van deze twee zijden  $PC_{n-1}$  en  $PC_n$  en de ingesloten hoek  $P_n - P_{n-1}$ , bekend zijn, gebruikt worden om den inhoud van ieder dezer driehoeken, door middel van hunne spherische excessen, te berekenen.

Het is namelijk uit de bolvormige driehoeksmeting bekend, dat de inhoud van iederen bolvormigen driehoek tot dien van het spherisch octant dezelfde verhouding heeft als zijn spherisch excès tot een rechten hoek. Stelt  $I$  den inhoud van een bolvormigen driehoek,  $\Delta$  dien van het spherisch octant, en  $\varepsilon$  het spherisch excès voor, dan is

$$I : \Delta = \varepsilon : 90^\circ, \text{ of } I = \frac{90}{\varepsilon} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

of, wel, wanneer  $A, B, C$  de hoeken van den driehoek beteekenen

$$I = \frac{(A + B + C) - 180^\circ}{90^\circ} \times \Delta \dots \dots \dots (22)$$

Het spherisch excès  $\varepsilon$ , dat onmiddellijk van de grootte der hoeken eens bolvormigen driehoeks afhangt, zal dus gevonden worden, wanneer men  $180^\circ$  van de som der hoeken aftrekt. Zijn de gegevens van een driehoek andere dan de drie hoeken, in ons geval twee zijden en de ingesloten hoek, dan vindt men  $\varepsilon$  door de formule

$$\cot \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cdot \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C},$$

welke, door te stellen  $\frac{\cot \frac{1}{2} a \cdot \cot \frac{1}{2} b}{\cos C} = Tg^2 \mu,$

tot dezen, beter voor de berekening geschikt, vorm wordt omgezet

$$Tg \frac{1}{2} \epsilon = Tg C \cos^2 \mu \dots \dots \dots (24)$$

Hoewel deze formule eenvoudig genoeg voor de bewerking is, geven wij toch aan de eerste de voorkeur, namelijk, aan het berekenen der beide overige hoeken van den driehoek. Daartoe hebben wij niets anders noodig dan de som der beide overige hoeken, en kunnen wij volstaan met de berekening van de eerste formule der Neperiaansche analogiën

$$Tg \frac{1}{2} (C_{n-1} + C_n) = \frac{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} - PC_n)}{\cos \frac{1}{2} (PC_{n-1} + PC_n)} \cot \frac{1}{2} (P_n - P_{n-1}) \dots (25)$$

Wanneer wij de waarden van SC uit tabel F, voor waarden van  $\phi$  van 10 tot 10' wilden interpoleren, en voor deze in tabel E de overeenkomstige waarden van  $\beta$  zoeken, en verder, voor al die waarden van  $\phi$ , P en PC uit tabel G interpoleren, dan zouden wij de geheele bedekte oppervlakte der zon in 112 bolvormige driehoeken verdeelen.

Het komt ons echter voor, dat de nauwkeurigheid ver genoeg voortgezet zal zijn, zoo wij ons voor de berekening van den inhoud bepalen tot de waarden van  $\phi$ , in tabel F aangenomen, in welk geval er nog 39 bolvormige driehoeken te berekenen zijn; welker inhouden dan wellicht met minder moeite tot elken gewenschten graad van nauwkeurigheid kunnen geïnterpoleerd worden.

Deze laatste verdeling in 39 driehoeken behoudende, zoeken wij eerst de elementen derzelfde uit tabel G, welke wij in tabel H mededeelen, om dan daarmede met behulp der formule (25), de halve som der onbekende hoeken te berekenen. Tabel H bevat nog in hare laatste kolommen de sinus-versussen zoowel der enkele zijden als die van hunne gemiddelde waarden, welke wij later noodig zullen hebben.

Ziehier de berekening van het spherisch excès  $\epsilon$ .

| Driehoek N°.                                     | 1            | 7              | 13             | 22             | 31             | 39             |
|--------------------------------------------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\frac{1}{2} (PC_0 - PC_1) =$                    | 0° 0' 33" 4  | 0° 7' 41" 4    | 0° 6' 1" 8     | 0° 9' 22" 6    | 0° 6' 38" 2    | 0° 0' 59" 7    |
| $\frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) =$                    | 28 4 55 7    | 25 17 15 8     | 22 57 47 7     | 20 41 56 5     | 18 34 10 2     | 17 41 44 7     |
| $\frac{1}{2} (P_1 - P_0) =$                      | 1 1 20 0     | 1 11 14 3      | 0 38 37 2      | 1 10 0 2       | 1 30 20 1      | 1 38 53 5      |
| <i>Log Cos <math>\frac{1}{2}</math> verschil</i> | 0.0000000    | 9.9999989      | 9.9999993      | 9.9999984      | 9.9999992      | 0.0000000      |
| <i>Log Sec <math>\frac{1}{2}</math> som</i>      | 0.0466432    | 0.0437499      | 0.0358558      | 0.0289794      | 0.0232199      | 0.0210511      |
| <i>Log Cot <math>\frac{1}{2}</math> P =</i>      | 1.7485312    | 1.6834981      | 1.9494433      | 1.6910949      | 1.5803179      | 1.5409946      |
|                                                  | 1.7951744    | 1.7272469      | 1.9852984      | 1.7200727      | 1.6035370      | 1.5620457      |
| $\frac{1}{2} (C + C) =$                          | 89° 4' 54.68 | 88° 55' 35" 18 | 89° 24' 26" 53 | 88° 54' 30" 84 | 88° 34' 21" 95 | 88° 25' 47" 10 |
| $\frac{1}{2} P =$                                | 1 1 20.00    | 1 11 14 30     | 0 38 37 20     | 1 30 0 20      | 1 30 20 10     | 1 38 53 50     |
| $90^\circ + \frac{1}{2} \epsilon =$              | 90 6 14 68   | 90 6 49 48     | 90 3 3 73      | 90 4 31 04     | 90 4 42 05     | 90 4 40 60     |
| $\epsilon$                                       | 12' 29" 36   | 13' 38" 96     | 6' 7" 46       | 9' 2" 08       | 9' 24" 10      | 9' 21" 20      |

Door op deze wijze de bewerkingen voort te zetten hebben wij de spherische excessen van al de 39 driehoeken verkregen.

*Tabel I. Spherische excessen der 39 bolvormige driehoeken.*

| n <sup>o</sup> . | ε          | n <sup>o</sup> . | ε          | n <sup>o</sup> . | ε        | n <sup>o</sup> . | ε         | n <sup>o</sup> . | ε           |
|------------------|------------|------------------|------------|------------------|----------|------------------|-----------|------------------|-------------|
| 1                | 12' 29" 36 | 9                | 14' 47" 24 | 17               | 7' 0" 00 | 25               | 5' 39" 60 | 33               | 14' 20" 80  |
| 2                | 12 32 78   | 10               | 15 21 50   | 18               | 7 17 56  | 26               | 6 0 04    | 34               | 3 35 08     |
| 3                | 12 38 26   | 11               | 16 15 30   | 19               | 7 37 52  | 27               | 6 28 18   | 35               | 4 2 80      |
| 4                | 12 47 80   | 12               | 17 23 22   | 20               | 8 0 98   | 28               | 6 55 86   | 36               | 4 45 46     |
| 5                | 12 58 58   | 13               | 6 7 46     | 21               | 8 28 86  | 29               | 7 32 36   | 37               | 5 55 06     |
| 6                | 13 17 40   | 14               | 6 18 26    | 22               | 9 2 08   | 30               | 8 18 54   | 38               | 9 11 86     |
| 7                | 13 38 96   | 15               | 6 30 78    | 23               | 9 44 14  | 31               | 9 24 10   | 39               | 9 21 20     |
| 8                | 14 5 84    | 16               | 6 45 00    | 24               | 10 32 58 | 32               | 11 9 42   | 1-39             | 374' 21" 82 |

*D. Berekening van den inhoud van het bedekte gedeelte der zon en zijne verhouding tot de geheele zichtbare oppervlakte voor den aangenomen afstand der middelpunten.*

Zooals wij reeds hebben opgemerkt, is het halve bedekte gedeelte der zon  $TBC_0T$ , fig. 4, ingesloten door een boog van een grooten cirkel  $C_0T$ , door een boog van een kleinen cirkel  $TB$ , en door eene spherische lijn  $C_0B$ , de doorsnede van het kegelvlak der maan met de oppervlakte der zon, — van welke kromme wij de vergelijking niet kennen, maar die wij aanvankelijk door 39 bogen van groote cirkels hebben vervangen. Dit bedekte gedeelte maakt een deel uit van de oppervlakte  $PBC_0P$ , welke wij in bolvormige driehoeken hebben verdeeld, en verschilt daarvan de oppervlakte van den bijgevoegden driehoek  $PBT$ . De laatstgenoemde driehoek is wederom gelijk aan het verschil van den zuiveren bolvormigen driehoek  $PBS$ , en het bolvormig segment  $BST$ , zoodat wij hebben

$$Inh. TBC_0 = Inh. PBC_0 - (Inh. PBS - Inh. TBS).$$

Dewijl nu  $PBS$  en  $TBS$  nauwkeurig uit de gegevens kunnen berekend worden, zoo zullen wij ons eerst bezig houden met het vinden van den inhoud  $PBC_0$ .

Genoemde inhoud kan nu op verschillende wijzen bepaald worden, naar gelang men voor de lijntjes, die de deelpunten  $C_0, C_1, C_2, \dots B$  onderling verbinden, den een of anderen vorm meent te mogen aannemen.

In de eerste plaats kan men de strooken, waarin wij de oppervlakte verdeeld hebben, beschouwen als zoovele bolvormige segmenten, waarvan de hoeken aan de pool gelijk zijn aan de in tabel H gevondene hoeken P, en waarvan de boog het gemiddelde der zijden  $PC_0$  en  $PC_1$ ,  $PC_1$  en  $PC_2$ , enz. bedraagt; alsdan neemt men voor de verbindingslijntjes  $C_0C_1$ , enz. kleine cirkels aan.

Ten anderen kunnen wij elke strook  $PC_0C_1$  verdeelen in een segment  $PC_0C'$ , dat ontstaat, wanneer men uit P met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een boog beschrijft, die de grootste zijde  $PC_1$  in  $C'$  snijdt, en in een driehoekje  $C_0C'C_1$ , hetwelk dan op een plat vlak moet worden overgebracht.

Dat driehoekje zal rechthoekig zijn, en zijn inhoud kan gevonden worden, hetzij men zijne schuine zijde, ontwikkeld zijnde, als eene rechte lijn, hetzij als eene parabolische kromme van hoogere orde beschouwt.

Ten derde, wanneer de boogjes  $C_0C_1$ , enz. als bogen van groote cirkels worden aangenomen, alsdan moeten alle strooken als bolvormige driehoeken behandeld worden.

1°. *De strooken beschouwd als segmenten met gemiddelde zijden tot boog.*

Noemen wij  $I$  den inhoud van het bolvormig segment, en  $R$  den straal van den bol, dan is

$$I = 2\pi R \times R \text{ Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \times \frac{LC_0PC_1}{360^\circ} = \\ = \pi R^2 \times \frac{LC_0PC_1}{180^\circ} \times \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \dots (26)$$

Ten einde aan de eene zijde te groote getallen, en aan de andere zijde te veel nullen achter het decimaalteeken te vermijden, nemen wij de minuut als eenheid aan, zoodat  $R = 3437'74677$  moet genomen worden. Hierdoor verandert de laatste formule in de volgende

$$I = \frac{\pi}{180^\circ} \times (3437'74677)^2 \times LC_0PC_1 \times \text{Sinvers } \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1) \quad (26')$$

of, de factor in logarithmen overgebracht en de hoeken  $C_0PC$  en  $180^\circ$ , in seconden uitgedrukt, verkrijgt men

|                                   |                        |                    |
|-----------------------------------|------------------------|--------------------|
| $2 \text{ Log } R$                | $= 2 \times 3.5362739$ | $= 7.0725478$      |
| $\text{Log } \pi$                 |                        | $= 0.4971499$      |
| $\text{Colog } 180 \times 3600''$ |                        | $= 4.1884250 - 10$ |
| $\text{Log coefficient}$          |                        | $= 1.7581227$      |



dus 
$$\text{Log } I = 1.7581227 + \text{Log Sinvers } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1) + \text{Log } \angle C_0 PC_1 \text{ (in seconden) } \dots \dots \dots (26')$$

In tabel H worden in de kolom met  $P_1 - P_0$  aan het hoofd de waarden der hoeken  $C_0 PC_1$ , en in de vóórlaatste kolom de sinver-  
sussen van  $\frac{1}{2} (PC_0 + PC_1)$  opgegeven. De berekening van  $I$  gaat  
nu gemakkelijk en aldus

| Nº.                                         | 1         | 7         | 13        | 22        | 31        |
|---------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\angle C_0 PC_1$                           | 7359'9    | 8548'6    | 4634'3    | 8400'3    | 10840'1   |
| $\text{Log } C_0 PC_1$                      | 8.8668719 | 8.9318950 | 8.6659841 | 8.9242948 | 4.0350333 |
| $\text{Log Sin } \frac{1}{2} (PC_0 + PC_1)$ | 9.0078971 | 8.9814834 | 8.8989664 | 8.8098962 | 8.7165208 |
| $\text{Log Sin coefficient}$                | 1.7581227 | 1.7581227 | 1.7581229 | 1.7581227 | 1.7581227 |
| $\text{Log } I$                             | 4.6328917 | 4.6715011 | 4.3280734 | 4.4923137 | 4.5096768 |
| $I =$                                       | 42942.93  | 46935.47  | 21041.33  | 31068.03  | 32335.20  |

Op deze wijze zijn de inhouden van alle 39 bolvormige segmenten  
berekend, waarvan de uitkomsten in de volgende tabel K gevonden  
worden.

*Tabel K. Inhouden der bolvormige segmenten.*

| Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº. | Inhoud.  | Nº.  | Inhoud.    |
|-----|----------|-----|----------|-----|----------|------|------------|
| 1   | 42942'93 | 11  | 55912'16 | 21  | 29169'70 | 31   | 32335'29   |
| 2   | 43109 24 | 12  | 59813 24 | 22  | 31068 03 | 32   | 38378 92   |
| 3   | 43459 15 | 13  | 21041 33 | 23  | 33480 26 | 33   | 49486 37   |
| 4   | 43997 03 | 14  | 21678 70 | 24  | 36339 43 | 34   | 12325 65   |
| 5   | 44748 10 | 15  | 22396 22 | 25  | 19454 84 | 35   | 13920 00   |
| 6   | 45699 92 | 16  | 23189 98 | 26  | 20629 30 | 36   | 16289 86   |
| 7   | 46935 47 | 17  | 24070 00 | 27  | 22087 57 | 37   | 20346 88   |
| 8   | 48539 03 | 18  | 25073 44 | 28  | 23834 87 | 38   | 31640 04   |
| 9   | 50411 08 | 19  | 26218 57 | 29  | 25926 26 | 39   | 32171 80   |
| 10  | 52826 95 | 20  | 27563 03 | 30  | 28471 40 | 1—39 | 1287031.54 |

De inhouden dezer 39 driehoekjes bij elkander geteld, verkrijgt  
men voor hunne som den gevraagden inhoud van

$$PBC_0 = 1,286,031'54 \square \text{ minuten.}$$

De vorm der formule (26) geeft wel aanleiding, om den inhoud  
van een bolvormig segment als eene volkomen ontwikkelbare opper-  
vlakte op een plat vlak over te brengen. Immers zij bestaat uit

twee factoren 1°.  $2\pi R \times \frac{\angle C_0 PC_1}{360}$ , dat is, een gedeelte van den

omtrek van den grooten cirkel van den bol, en 2°.  $R \sinvers \frac{1}{2}(PC_0 + PC_1)$ , dat is de sinusversus van den boog van het segment; en daar deze beide factoren zich in dezelfde eenheid laten uitdrukken, zoo zal de oppervlakte van elk bolvormig segment kunnen voorgesteld worden door een op schaal geteekenden platten rechthoek. Alle onze 39 bolvormige segmenten zullen dan zoovele rechthoeken kunnen voorstellen, met den eersten factor als grondlijnen of abscissen en met den tweeden als opstaande zijden of ordinaten; en wanneer wij nu al die grondlijnen naast elkander op eene rechte lijn plaatsen, en dus ook de rechthoeken, die ook verschillende hoogten hebben, dan zal de fig. 5 den geheelen inhoud  $PBC_0$ , op een plat vlak ontwikkeld, voorstellen. De geheele basis van de aldus ontstane figuur zal dan,  $R$  weder in minuten uitdrukkende, gelijk zijn aan

$$2\pi R \times \frac{\angle PBC_0}{360} = 2\pi \times 3437'.74677 \times \frac{89^\circ 5' 7''}{360} \text{ (tabel G)} = 5345' 12,$$

de hoogte van den eersten rechthoek  $= R \times \sin 26^\circ 4' 55'' 7 = 3437'.74677 \times 0.101825 = 349' 963$ ; en die van den laatsten  $= 3437'.74677 \times 0.047316 = 161' 610$ . Nemen wij nu, om de figuur te teekenen, bijv. voor iedere 1000' van de basis eene lengte van 25 mm., en, ten einde de kromte der lijn beter te doen uitkomen, voor iedere 100' der hoogte eene lengte van 50 mm., dan ontstaat figuur 5, waarin al de 39 segmenten afgekort, om ruimte te winnen, naast elkander voorkomen.

## 2°. De strooken verdeeld in segmenten en driehoekjes.

Wanneer wij in elke strook  $C_0 PC_1$  uit de pool  $P$  met de kleinste zijde  $PC_0$  als straal een cirkelboogje beschrijven, die de langste zijde  $PC_1$  in  $C'$  ontmoet, dan verdeelen wij die allen in segmenten met hunne kleinste zijden tot boog, en in een driehoekje  $C_0 C_1 C'$ . De inhouden van de achtereenvolgende segmenten worden dan op de zoo even aangewezen manier, doch met de kleinste zijde als boog, nauwkeurig gevonden; doch de inhouden der driehoekjes, — daar voor deze geene formule op den bol te vinden is, en zij dus ook niet volkomen op een plat vlak kunnen worden uitgelegd —, moeten door benadering gevonden worden.

Berekenen wij eerst de inhouden der segmenten. Hiertoe moeten wij nemen de sinus-versussen der kleinste bogen van elken driehoek,

welker waarden in de laatste kolom van tabel H gevonden worden. De berekening geschiedt weder volgens formule (26<sup>b</sup>).

*Tabel L. Inhouden der bolvormige segmenten.*

| N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.  | N <sup>o</sup> . | Inhoud.    |
|------------------|----------|------------------|----------|------------------|----------|------------------|------------|
| 1                | 42912'99 | 11               | 54817'04 | 21               | 28757'11 | 31               | 31954'57   |
| 2                | 43021 37 | 12               | 58436 57 | 22               | 30606 47 | 32               | 37899 28   |
| 3                | 43313 16 | 13               | 20860 24 | 23               | 32943 68 | 33               | 48830 72   |
| 4                | 43779 58 | 14               | 21480 97 | 24               | 35763 03 | 34               | 12292 25   |
| 5                | 44441 34 | 15               | 22179 57 | 25               | 19278 30 | 35               | 13877 17   |
| 6                | 45328 52 | 16               | 22951 80 | 26               | 20435 07 | 36               | 16236 77   |
| 7                | 46466 72 | 17               | 23809 33 | 27               | 21869 67 | 37               | 20283 60   |
| 8                | 47896 83 | 18               | 24784 90 | 28               | 23587 18 | 38               | 31530 35   |
| 9                | 49697 42 | 19               | 25897 99 | 29               | 25645 81 | 39               | 32114 86   |
| 10               | 51947 07 | 20               | 27211 00 | 30               | 28142 56 | 1-39             | 1273282.86 |

*Berekening van de inhouden der driehoekjes.*

Leggen wij zooveel doenlijk de overgeblevene driehoekjes op een plat vlak neêr, dan zullen zij, dewijl de zijden der segmenten loodrecht op hunne basissen staan, ook rechthoekige driehoekjes moeten vormen, wier basissen, ontwikkeld, gelijk zijn aan den boog van den kleinen cirkel, die ook de bogen der segmenten vormt, en wier hoogten, mede ontwikkeld, gelijk zijn aan het verschil der zijden van iedere strook of segment; derhalve hunnen

$$\text{Inhoud} = (\angle C_0 PC_1 \times \sin PC_1) \times \frac{1}{2} (PC_0 - PC_1).$$

Voor de inhouden dezer driehoekjes, als zoodanig beschouwd, vinden wij in tabel M de volgende waarden.

*Tabel M. Inhoud der rechthoekige driehoekjes.*

| N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. | N <sup>o</sup> . | Inhoud. |
|------------------|---------|------------------|---------|------------------|---------|------------------|---------|
| 1                | 30'01   | 11               | 1092'23 | 21               | 411'14  | 21               | 379'60  |
| 2                | 88 24   | 12               | 1368 30 | 22               | 460 42  | 32               | 478 21  |
| 3                | 150 45  | 13               | 180 95  | 23               | 533 10  | 33               | 654 37  |
| 4                | 217.00  | 14               | 197 35  | 24               | 623 57  | 34               | 33 99   |
| 5                | 289 50  | 15               | 216 03  | 25               | 174 44  | 35               | 39 56   |
| 4                | 370 46  | 16               | 237 44  | 26               | 193 33  | 36               | 48 19   |
| 7                | 464 31  | 17               | 260 21  | 27               | 217 75  | 37               | 62 48   |
| 8                | 575 43  | 18               | 287 67  | 28               | 246 69  | 38               | 109 35  |
| 9                | 709 93  | 19               | 319 55  | 29               | 280 01  | 39               | 56 19   |
| 10               | 876 11  | 20               | 350 76  | 30               | 317 25  | 1-39             | 136.02  |

De voorgaande berekening van de inhouden der driehoekjes, als plat en rechthoekig beschouwd, mogen wij niet als nauwkeurig genoeg houden, dewijl wij daardoor van de onderstelling zijn uitgegaan, dat hunne schuine zijden rechte lijnen zijn. De loop der kromme lijn van figuur 5 doet immers zien, dat wij die onderstelling, vooral niet bij het begin en het einde der kromme mogen aannemen, maar dat wij de schuine lijnen der driehoekjes moeten vervangen door kromme lijnen. Wij komen alzoo tot het vraagstuk om den inhoud eener vlakke kromme lijn bij benadering te vinden.

Zooals men weet, beschouwt men voor dat doel, de kromme als eene parabool van hoogere macht, en neemt men tot gemak der berekening alle opvolgende abcissenverschillen aan elkander gelijk; voor welke abcissen dan de ordinaten der kromme moeten bekend zijn. Alvorens wij dus tot de inhoudvinding van onze driehoekjes kunnen overgaan, is het allereerst noodig, dat wij de waarden van de hoeken  $P$  of der deelen van de basis van ieder der segmenten afzonderlijk even groot maken, en daarna voor elk dier abcissen de overeenkomstige waarden der ordinaten berekenen.

Deze bewerking geeft de gelegenheid aan de hand om de nauwkeurigheid der inhoudsvinding binnen veel engere grenzen te brengen dan wij tot hiertoe gedaan hebben, dewijl daardoor het aantal deelen, waarin elke basis verdeeld wordt, meer en meer vergroot wordt. Het komt ons voor, dat wij ons doel, eenen genoegzamen graad van nauwkeurigheid, zullen bereiken, wanneer wij ons voor de verdeeling bepalen tot iedere  $10'$  boogs van  $\phi$ , alzoo dat elk der bogen van  $0$  tot  $1^\circ$ , van  $1-2^\circ$  ... en van  $11$  tot  $12^\circ$  nog in zes; en de bogen  $12^\circ$  tot  $12^\circ 20'$ , enz. ... en van  $15^\circ 40'$  tot  $16^\circ$  nog in twee gelijke deelen worden verdeeld; door welke onderverdeeling onze kromme lijn van figuur 5, in 112 punten verdeeld wordt. Ware  $PC$  in functie van  $P$  gegeven, dan zou het eenvoudiger geweest zijn, de hoeken  $P$  van ieder der hierboven genoemde driehoeken in 6 of in 2 gelijke deelen te verdeelen, en voor die tusschenwaarden de  $PC$  of de ordinaten volgens de alsdan bestaande formule te berekenen. Nu echter kunnen wij niet anders dan of met de nieuwe waarden van  $\phi$  die grootheden  $P$  en  $PC$  volgens formule  $20''$  onmiddelijk berekenen, of die door interpolatiën vinden. Wij hebben de laatste bewerking als de eenvoudigste verkozen, en zoeken, uit de gegevens van tabel  $G$ , de tusschenwaarden van  $P$  en  $PC$ , door eerst in de helft, en later in drieën te interpoleeren. Wij vinden dan

|                                                       |                |                             |           |
|-------------------------------------------------------|----------------|-----------------------------|-----------|
| voor $\phi = 0^{\circ} 0'$ , $P = 0^{\circ} 0' 0''$ , | $+ 20' 23'' 4$ | $PC = 26^{\circ} 5' 29'' 1$ | $- 2'' 4$ |
| $= 10$                                                | $= 20\ 28\ 4$  | $= 5\ 26\ 7$                | $- 5\ 8$  |
| $= 20$                                                | $= 40\ 47\ 9$  | $= 5\ 20\ 9$                | $- 9\ 3$  |
| $= 30$                                                | $= 1\ 113\ 7$  | $= 5\ 11\ 6$                | $- 12\ 8$ |
| $= 40$                                                | $= 21\ 40\ 9$  | $= 4\ 58\ 8$                | $- 16\ 2$ |
| $= 50$                                                | $= 42\ 9\ 5$   | $= 4\ 42\ 6$                | $- 20\ 3$ |
| $= 1\ 0$                                              | $= 22\ 39\ 9$  | $= 26\ 4\ 22\ 3$            |           |

In figuur 6 stellen wij door ABCD de te berekenen oppervlakte voor van  $\phi = 0^{\circ}$  tot  $\phi = 1^{\circ}$ ; AB is de as der abscissen  $= 2^{\circ} 2' 39'' 9 = 7359^{\circ} 9$ ; AD  $= 26^{\circ} 5' 29'' 1$  de ordinaat voor  $\phi = 0^{\circ}$ ; en BC  $= 26^{\circ} 4' 22'' 3$  de ordinaat voor  $\phi = 1^{\circ}$ , en CD de kromme. Door het interpoleren van  $AB = P$ , in zessen, verkrijgen wij de abscissen  $B\delta_1$  en de ordinaten  $\delta_1 c_1 = PC$ , die door gestippelde lijnen zijn geteekend. Om nu gelijke abscissen voor de berekening van de hier voorgestelde kromme vlakte te verkrijgen, verdeelen wij AB in zes gelijke deelen, en trekken uit die deelpunten ordinaten tot aan de kromme; dewijl nu deze ordinaten niet met de vorige (gestippelde) te samen zullen vallen, moeten hunne waarden op nieuw voor gelijke abscissenwaarden van  $20' 26'' 65$ , en nogmaals door interpolatie worden gezocht. Deze bewerking voor alle onze kromme oppervlakten uitvoerende, verkrijgt men de waarden van P en PC, dat zijn de abscissen en ordinaten van eene kromme door 112 punten bepaald; deze waarden zijn in tabel N opgenomen.

In onderscheidene leerboeken, onder andere ook in de „*Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der Analytischen Geometrie*, von L. J. MAGNUS, 1<sup>er</sup> Theil, Seite 498”, komt de methode voor tot het vinden van eene oppervlakte, begrensd door de abscissenas, de ordinaten van het eerste en laatste punt en de kromme, door benadering te bepalen. Wij verwijzen daarheen, de notatiën der abscissen en ordinaten behoudende, zooals die in figuur 7 zijn aangewezen <sup>1)</sup>.

Voor de uitdrukking van den inhoud met zes ordinaten vinden wij aldaar

$$840 I = \left\{ 41(y_0 + y_5) + 216(y_1 + y_4) + 27(y_2 + y_3) + 272y_6 \right\} h; \quad (27)$$

en voor den inhoud met drie ordinaten

<sup>1)</sup> Van het geven van een uitgewerkt voorbeeld ter berekening der verschillende coëfficiënten kunnen wij ons ontlagen rekenen, daar die voorkomt in dit Archief, Deel IX, Stuk I, blz. 76–86, bij de bepaling van de vergelijking eener kromme door twaalf punten.

$$6 I = \{ (y_0 + y_1) + 4y_1 \} h \dots \dots \dots (28)$$

De eerste formule (27) zal ons dienen voor de 12 oppervlakten van  $\phi = 0^\circ$  tot  $\phi = 12^\circ$ , en de tweede (28) voor die van de 12 laatste van  $\phi = 12^\circ$  tot  $\phi = 16^\circ$ .

Uit tabel N worden nu gemakkelijk in ieder der te berekenen oppervlakten de waarden der ordinaten  $y_0, y_1, \dots$  door aftrekking verkregen; in aanmerking nemende dat, dewijl wij den inhoud van driehoekige vlakken moeten zoeken, de laatste of eerste ordinaat gelijk 0 moet genomen worden.

In de volgende tabel O zijn de onderscheidene waarden van de genoemde ordinaten, benevens de sommen van  $y_1 + y_5$  en van  $y_2 + y_4$ , voorts van  $\frac{1}{6}h$  of  $\frac{1}{3}h$ , de afstanden der ordinaten in ieder der beschouwde oppervlakten, opgenomen.

De uit deze gegevens berekende inhouden zijn nu in vierkante seconden uitgedrukt. Om die inhouden nu bij die der segmenten van tabel L te kunnen voegen, moeten zij door 3600 worden gedeeld. Voor de waarden van  $h$  in formule (27) moeten die van  $\frac{1}{6}h$  in de laatste kolom van tabel O met 6 vermenigvuldigd, en die van  $\frac{1}{3}h$  verdubbeld worden; of men kan ze ook behouden, door de coëfficiënten der formule (27) met 6, en die van formule (28) met 2 te vermenigvuldigen. Voorts, daar deze  $h$  hoeken voorstellen, moeten zij nog door vermenigvuldiging met de sinus van PC tot de grootte der basissen van de segmenten herleid worden.

Tot gemak der berekening herleiden wij eerst de coëfficiënten A tot G.

| Coëfficiënten A en G.  | B en F.           | C en E.           | D.                |
|------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Log 41 = 1.6127839     | 216 = 2.3344538   | 27 = 1.4313638    | 272 = 2.4345689   |
| Log 6 = 0.7781513      | = 4.2975695       | = 4.2975695       | = 4.2975695       |
| Colog 3600 = 6.4436975 |                   |                   |                   |
| Colog 840 = 7.0757207  |                   |                   |                   |
| Log A = 5.9103534      | Log B = 6.6320233 | Log C = 5.7289333 | Log D = 6.7321384 |
| A = 0.000081349        | B = 0.00042857    | C = 0.000053571   | D = 0.00053968    |

De formules (27) en (28) veranderen dus in

$$I = \{ [5.9103534] y_0 + [6.6320233] (y_1 + y_5) + [5.7289333] (y_2 + y_4) + [6.7321384] y_3 \} \times \frac{1}{6} h \times \sin PC \quad (27')$$

$$I = \frac{1}{10800} \{ y_0 + 4y_1 \} \times \frac{1}{3} h \times \sin PC \dots \dots \dots (28')$$

Wij laten de berekening der 24 oppervlakken hieronder volgen.

Tabel P.

|                               | 1         |         | 2         |         | 3         |         |
|-------------------------------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|---------|
| $\text{Log } y_0 =$           | 1.8247765 |         | 2.2933626 |         | 2.5183823 |         |
| $\text{Log } A =$             | 5.9103534 |         | 5.9103534 |         | 5.9103534 |         |
|                               | 7.7351299 | 0.00543 | 8.2037160 | 0.01599 | 8.4287357 | 0.02684 |
| $\text{Log } (y_1 + y_5) =$   | 1.9253121 |         | 2.3316297 |         | 2.5420781 |         |
| $\text{Log } B =$             | 6.6320233 |         | 6.6320233 |         | 6.6320233 |         |
|                               | 8.5573354 | 0.03608 | 8.9636530 | 0.09198 | 9.1741014 | 0.14932 |
| $\text{Log } (y_2 + y_4) =$   | 1.9763500 |         | 2.3546846 |         | 2.5549735 |         |
| $\text{Log } C =$             | 5.7289333 |         | 5.7289333 |         | 5.7289333 |         |
|                               | 7.7052833 | 0.00507 | 8.0836179 | 0.01213 | 8.2839068 | 0.01923 |
| $\text{Log } y_3 =$           | 1.6910815 |         | 2.0461048 |         | 2.2571984 |         |
| $\text{Log } D =$             | 6.7321384 |         | 6.7321384 |         | 6.7321384 |         |
|                               | 8.4232199 | 0.02650 | 8.7782432 | 0.06001 | 8.9893368 | 0.09757 |
| $\text{Log } \{ \dots \} =$   | 8.8637985 | 0.07308 | 9.2555378 | 0.18011 | 9.4668083 | 0.29296 |
| $\text{Log } \frac{1}{6} h =$ | 3.0887210 |         | 3.0915899 |         | 3.0974934 |         |
| $\text{Log Sin P C} =$        | 9.6427845 |         | 9.6121309 |         | 9.6407047 |         |
| $\text{Log } I =$             | 1.5953040 |         | 1.9892586 |         | 2.2050064 |         |
| $I =$                         |           | 39'40   |           | 97'56   |           | 160'33  |

|                               | 4         |         | 5         |         | 6         |         |
|-------------------------------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|---------|
| $\text{Log } y_0 =$           | 2.6705242 |         | 2.7861833 |         | 2.8809850 |         |
| $\text{Log } A =$             | 5.9103534 |         | 5.9103534 |         | 5.9103534 |         |
|                               | 8.5808776 | 0.03810 | 8.6965367 | 0.04972 | 8.7913384 | 0.06185 |
| $\text{Log } (y_1 + y_5) =$   | 2.6867256 |         | 2.7969904 |         | 2.8901415 |         |
| $\text{Log } B =$             | 6.6320233 |         | 6.6320233 |         | 6.6320233 |         |
|                               | 9.3187489 | 0.20833 | 9.4290137 | 0.26854 | 9.5221648 | 0.33279 |
| $\text{Log } (y_2 + y_4) =$   | 2.7757560 |         | 2.8034571 |         | 2.8952568 |         |
| $\text{Log } C =$             | 5.7289333 |         | 5.7289333 |         | 5.7289333 |         |
|                               | 8.5046893 | 0.03197 | 8.5323904 | 0.03407 | 8.6241901 | 0.04209 |
| $\text{Log } (y_3) =$         | 2.3979400 |         | 2.5046068 |         | 2.5961571 |         |
| $\text{Log } D =$             | 6.7321384 |         | 6.7321384 |         | 6.7321384 |         |
|                               | 9.1300784 | 0.13492 | 9.2367452 | 0.17248 | 9.3282955 | 0.21296 |
| $\text{Log som} =$            | 9.6162864 | 0.41332 | 9.7200021 | 0.52481 | 9.8127062 | 0.64969 |
| $\text{Log } \frac{1}{6} h =$ | 3.1064732 |         | 3.1186516 |         | 3.1342952 |         |
| $\text{Log Sin P C} =$        | 9.6389432 |         | 9.6360007 |         | 9.6326488 |         |
| $\text{Log } I =$             | 2.3617028 |         | 2.4746544 |         | 2.5796502 |         |
| $I =$                         |           | 229'99  |           | 298'30  |           | 379'89  |

|                               | 7         |         | 8         |         | 9         |         |
|-------------------------------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|---------|
| $\text{Log } y_0 =$           | 2.9650605 |         | 3.0383022 |         | 3.1070403 |         |
| $\text{Log } A =$             | 5.9103534 |         | 5.9103534 |         | 5.9103534 |         |
|                               | 8.8754139 | 0.07505 | 8.9486556 | 0.08885 | 9.0173937 | 0.10409 |
| $\text{Log } (y_1 + y_2) =$   | 2.9688097 |         | 3.0422614 |         | 3.1077525 |         |
| $\text{Log } B =$             | 6.6320233 |         | 6.6320233 |         | 6.6320233 |         |
|                               | 9.6008330 | 0.39867 | 9.6742847 | 0.47237 | 9.7397758 | 0.54926 |
| $\text{Log } (y_2 + y_3) =$   | 2.9710438 |         | 3.0422604 |         | 3.1074135 |         |
| $\text{Log } C =$             | 5.7289333 |         | 5.7289333 |         | 5.7289333 |         |
|                               | 8.6999771 | 0.05012 | 8.7711937 | 0.05905 | 8.8363468 | 0.06860 |
| $\text{Log } (y_3) =$         | 2.6708023 |         | 2.7417817 |         | 2.8062478 |         |
| $\text{Log } D =$             | 6.7321384 |         | 6.7321384 |         | 6.7321384 |         |
|                               | 9.4029407 | 0.25290 | 9.4739201 | 0.29780 | 9.5383862 | 0.34545 |
| $\text{Log } \text{sum} =$    | 9.8902757 | 0.77674 | 9.9628757 | 0.91807 | 0.0283272 | 1.06740 |
| $\text{Log } \frac{1}{6} h =$ | 3.1537440 |         | 3.1772710 |         | 3.2056157 |         |
| $\text{Log Sin } P C =$       | 9.6285307 |         | 9.6236016 |         | 9.6177409 |         |
| $\text{Log } l =$             | 2.6725504 |         | 2.7637483 |         | 2.8516838 |         |
| $l =$                         |           | 470'49  |           | 580'43  |           | 710'70  |

|                               | 10        |         | 11        |         | 12        |         |
|-------------------------------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|---------|
| $\text{Log } y_0 =$           | 3.1715802 |         | 3.2350232 |         | 3.2946426 |         |
| $\text{Log } A =$             | 5.9103534 |         | 5.9103534 |         | 5.9103434 |         |
|                               | 9.0819336 | 0.12076 | 9.1453766 | 0.13976 | 9.2049860 | 0.16032 |
| $\text{Log } (y_1 + y_2) =$   | 3.1677682 |         | 3.2207355 |         | 3.2740192 |         |
| $\text{Log } B =$             | 6.4320232 |         | 6.6320233 |         | 6.6320232 |         |
|                               | 9.7992814 | 0.62991 | 9.8527587 | 0.71246 | 9.9060424 | 0.80546 |
| $\text{Log } (y_2 + y_3) =$   | 3.1699682 |         | 3.2118411 |         | 3.2681800 |         |
| $\text{Log } C =$             | 5.7289333 |         | 5.7289333 |         | 5.7289333 |         |
|                               | 8.8989015 | 0.07923 | 8.9407744 | 0.08725 | 8.9971133 | 0.09934 |
| $\text{Log } (y_3) =$         | 2.8624893 |         | 2.9070350 |         | 2.9976485 |         |
| $\text{Log } D =$             | 6.7321384 |         | 6.7321384 |         | 6.7321384 |         |
|                               | 9.5946277 | 0.39321 | 9.6391734 | 0.43569 | 9.7297869 | 0.53677 |
| $\text{Log } \text{sum} =$    | 0.0874656 | 1.22311 | 0.1383534 | 1.37516 | 0.2046328 | 1.60189 |
| $\text{Log } \frac{1}{6} h =$ | 3.2393495 |         | 3.2798381 |         | 3.3277062 |         |
| $\text{Log Sin } P C =$       | 9.6108141 |         | 9.6026315 |         | 9.5930171 |         |
| $\text{Log } l =$             | 2.9376292 |         | 3.0208230 |         | 3.1253561 |         |
| $l =$                         |           | 886'22  |           | 1049'13 |           | 1334'60 |



|                       | 13        | 14        | 15        | 16        | 17        | 18        |
|-----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $1 \times y_0 =$      | 723'6     | 759'1     | 796'7     | 837'2     | 874'5     | 917'7     |
| $4 \times y_1 =$      | 1463.2    | 1465.6    | 1496.4    | 1601.6    | 1634.0    | 1730.8    |
| Som =                 | 2186.8    | 2224.7    | 2293.1    | 2438.2    | 2503.5    | 2648.5    |
| Log som =             | 3.3398091 | 3.3472715 | 3.3604230 | 3.3871762 | 3.3994141 | 3.4230000 |
| Log coëff. =          | 5.9665762 | 5.9665762 | 5.9665762 | 5.9665762 | 5.9665762 | 5.9665762 |
| Log $\frac{1}{2} h =$ | 3.3649542 | 3.3856330 | 3.4079515 | 3.4317576 | 3.4571246 | 3.4845845 |
| Log Sin $\rho =$      | 9.5894195 | 9.5856695 | 9.5815667 | 9.5772727 | 9.5727303 | 9.5679097 |
| Log I =               | 2.2607590 | 2.2851502 | 2.3165174 | 2.3627827 | 2.3958452 | 2.4420704 |
| I =                   | 182'29    | 192'82    | 207'26    | 230'56    | 248'80    | 276'74    |

|                       | 19        | 20        | 21        | 22        | 23        | 24        |
|-----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $1 \times y_0 =$      | 963'3     | 993'1     | 1085'4    | 1094'6    | 1192'8    | 1256'4    |
| $4 \times y_1 =$      | 1763.6    | 1812.0    | 1901.6    | 2098.4    | 2071.2    | 2152.0    |
| Som =                 | 2726.9    | 2805.1    | 2987.6    | 3193.0    | 3264.0    | 3408.4    |
| Log som =             | 3.4356692 | 3.4479483 | 3.4752353 | 3.5041989 | 3.5137502 | 3.5325506 |
| Log coëff. =          | 5.9665762 | 5.9665762 | 5.9665762 | 5.9665762 | 5.9665762 | 5.9665762 |
| Log $\frac{1}{2} h =$ | 3.5143086 | 3.5469126 | 3.5832380 | 3.6232648 | 3.6691867 | 3.7198448 |
| Log Sin $\rho =$      | 9.5627743 | 9.5572959 | 9.5514606 | 9.5451916 | 9.5384460 | 9.5311774 |
| Log I =               | 2.4793283 | 2.5187330 | 2.5765101 | 2.6392315 | 2.6879591 | 2.7501490 |
| I =                   | 301'53    | 330'16    | 377'14    | 435'74    | 487'48    | 562'53    |

### 3. De strooken beschouwd als bolvormige driehoeken.

Voor de bepaling van den inhoud der strooken als bolvormige driehoeken, of wat hetzelfde zegt, de verbindingsboogjes  $C_0, C_1, C_2, C_3$ , als bogen van groote cirkels aangenomen, hebben wij de formule (23) te nemen, op blz. 43 gesteld, en voor de uitwerking dier formule, de som der op blz. 46 reeds gevondene spherische excessen.

De geheele inhoud namelijk wordt uitgedrukt door

$$I = \Delta \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{3,9}}{90^\circ} = \frac{\pi R^3}{180^\circ} \{ \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{3,9} \}.$$

$$\text{Log } \pi = 0.4971499$$

$$2 \text{ Log } R = 7.0725478$$

$$\text{Colog } 648000'' = 4.1884250$$

$$\text{Log } \{ \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{3,9} \} = \text{Log } 22461''82 = 4.3514450$$

$$\text{Log } I = 6.1095677$$

$$I = 1.286967,90$$

Tot eene algemeene vergelijking van de uitkomsten der inhoudsvinding in de hierboven beschouwde manieren, strekken de cijfers der volgende tabel Q.

Tabel Q. *Vergelijking der gevondene inhouden.*

| N <sup>o</sup> . | 1 <sup>ste</sup> manier.                            | 2 <sup>de</sup> manier.                            |                                              |                        |                                           |                    | 3 <sup>de</sup> manier.       |
|------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------|-------------------------------------------|--------------------|-------------------------------|
|                  | <i>Bolvormige segmenten.</i><br><i>K' blz. 168.</i> | <i>Bolvormige segmenten.</i><br><i>L blz. 170.</i> | <i>Rechth. driehoek.</i><br><i>Mbl. 170.</i> | <i>Samen.</i>          | <i>Ronde oppervl.</i><br><i>blz. 174.</i> | <i>Samen.</i>      | <i>Bolvormige driehoeken.</i> |
| 1                | 42942'93                                            | 42912'99                                           | 30'01                                        | 42943'00               | 39'40                                     | 42952'39           | 42935'17                      |
| 2                | 43109 24                                            | 43021 37                                           | 88 24                                        | 43109 61               | 97 56                                     | 43118 93           | 43131 13                      |
| 3                | 43459 15                                            | 43313 16                                           | 150 45                                       | 43463 61               | 160 33                                    | 43473 49           | 43445 10                      |
| 4                | 43997 03                                            | 43779 58                                           | 217 00                                       | 43996 58               | 229 99                                    | 44009 57           | 43991 72                      |
| 5                | 44748 10                                            | 44441 34                                           | 289 50                                       | 44730 84               | 293 80                                    | 44739 64           | 44609 37                      |
| 6                | 45699 92                                            | 45328 52                                           | 370 46                                       | 45698 98               | 379 89                                    | 45708 41           | 45687 67                      |
| 7                | 46935 47                                            | 46466 72                                           | 464 31                                       | 46931 03               | 470 49                                    | 46937 21           | 46922 97                      |
| 8                | 48539 03                                            | 47896 83                                           | 575 43                                       | 48472 26               | 580 43                                    | 48477 26           | 48463 07                      |
| 9                | 50411 08                                            | 49697 42                                           | 709 93                                       | 50407 35               | 710 70                                    | 50408 12           | 50735 12                      |
| 10               | 52826 95                                            | 51947 07                                           | 876 11                                       | 52823 18               | 886 22                                    | 52793 29           | 52798 06                      |
| 11               | 55912 16                                            | 54817 04                                           | 1092 23                                      | 55909 27               | 1049 13                                   | 55866 17           | 55880 57                      |
| 12               | 59813 24                                            | 58436 57                                           | 1368 30                                      | 59804 87               | 1334 60                                   | 59771 17           | 59772 11                      |
| 13               | 21041 33                                            | 20860 24                                           | 180 95                                       | 21041 19               | 182 29                                    | 21042 53           | 21053 91                      |
| 14               | 21678 70                                            | 21480 97                                           | 197 35                                       | 21678 32               | 192 82                                    | 21673 79           | 21672 70                      |
| 15               | 22396 22                                            | 22179 57                                           | 216 03                                       | 22395 60               | 207 26                                    | 22386 83           | 22390 04                      |
| 16               | 23189 98                                            | 22951 80                                           | 237 44                                       | 23189 24               | 230 56                                    | 23182 36           | 23204 26                      |
| 17               | 24070 00                                            | 23809 33                                           | 260 21                                       | 24069 64               | 248 80                                    | 24058 13           | 24064 23                      |
| 18               | 25073 44                                            | 24784 90                                           | 287 67                                       | 25072 57               | 276 74                                    | 25061 64           | 25070 34                      |
| 19               | 26218 57                                            | 25897 99                                           | 319 55                                       | 26217 54               | 301 53                                    | 26199 52           | 26213 97                      |
| 20               | 27563 03                                            | 27211 00                                           | 350 76                                       | 27561 76               | 330 16                                    | 27541 16           | 27558 13                      |
| 21               | 29169 70                                            | 28757 11                                           | 411 14                                       | 29168 25               | 377 14                                    | 29134 25           | 29155 53                      |
| 22               | 31068 03                                            | 30606 47                                           | 460 42                                       | 31066 89               | 435 74                                    | 31042 21           | 31058 90                      |
| 23               | 33480 26                                            | 32943 68                                           | 533 10                                       | 33476 78               | 487 48                                    | 33431 16           | 33468 78                      |
| 24               | 36389 43                                            | 35763 03                                           | 623 57                                       | 36386 60               | 562 53                                    | 36325 56           | 36244 17                      |
| 25               | 19454 84                                            | 19278 30                                           | 174 44                                       | 19452 74               | 174 44                                    | 19452 74           | 19547 65                      |
| 26               | 20629 30                                            | 20435 07                                           | 193 33                                       | 20628 40               | 193 33                                    | 20628 40           | 20628 78                      |
| 27               | 22087 57                                            | 21869 67                                           | 217 75                                       | 22087 42               | 217 75                                    | 22087 42           | 22241 08                      |
| 28               | 23834 87                                            | 23587 18                                           | 246 69                                       | 23833 87               | 246 69                                    | 23833 87           | 23827 03                      |
| 29               | 25926 26                                            | 25645 81                                           | 280 01                                       | 25925 82               | 280 01                                    | 25925 82           | 25918 32                      |
| 30               | 28471 40                                            | 28142 56                                           | 317 25                                       | 28459 81               | 317 25                                    | 28459 81           | 28564 25                      |
| 31               | 32335 29                                            | 31954 57                                           | 379 60                                       | 32334 17               | 379 60                                    | 32334 17           | 32390 55                      |
| 32               | 38378 92                                            | 37899 28                                           | 478 21                                       | 38377 49               | 478 21                                    | 38377 49           | 38354 94                      |
| 33               | 49486 37                                            | 48830 72                                           | 654 37                                       | 49485 09               | 654 37                                    | 49485 09           | 49320 22                      |
| 34               | 12325 65                                            | 12292 25                                           | 33 99                                        | 12326 24               | 33 99                                     | 12326 24           | 12323 18                      |
| 35               | 13920 00                                            | 13877 17                                           | 39 56                                        | 13916 73               | 39 56                                     | 13916 73           | 13911 42                      |
| 36               | 16289 86                                            | 16236 77                                           | 48 19                                        | 16284 86               | 48 19                                     | 16284 86           | 16355 66                      |
| 37               | 20346 88                                            | 20283 60                                           | 62 48                                        | 20346 08               | 62 48                                     | 20346 08           | 20343 44                      |
| 38               | 31640 04                                            | 31530 35                                           | 109 35                                       | 31639 70               | 109 35                                    | 31639 70           | 31619 26                      |
| 39               | 32171 30                                            | 32114 86                                           | 56 81                                        | 32171 67               | 56 81                                     | 32171 67           | 32154 40                      |
|                  | 1287031'54<br>+ 386,56                              | 1273282 86                                         | 13602'19                                     | 1286885'05<br>+ 240,07 | 13362'12                                  | 1286644'98<br>0,00 | 1286956'04<br>+ 311,06        |

De uitkomsten der berekeningen, volgens de drie genoemde manieren uitgevoerd, geven een zeer onbeduidend onderling verschil te kennen; evenwel mogen wij de tweede manier, alwaar de kromme door 112 punten bepaald wordt, wel voor de nauwkeurigste houden, en aannemen

$$\text{Inhoud } PC_0 B = 1286644.98 \square \text{ min.}$$

Om nu daaruit af te leiden de oppervlakte van het door de maan bedekte gedeelte der zon, heeft men formule (19) blz. 40 en fig. 4

$$TC_0 B = PC_0 B - (PSB - TSB) \dots \dots \dots (19)$$

De inhoud van den bolvormigen driehoek PSB wordt het best door middel van zijn spherisch exces bepaald.

*Berekening van het spherisch exces van  $\Delta PSB$ .*

$$\angle P = 89^\circ 5' 7'', \quad SP = 90^\circ, \quad PB = 17^\circ 40' 48'';$$

formule (21) blz. 42.

$$\frac{1}{2}(PS - PB) = 36^\circ 9' 36'', \quad \text{Log Cos} = 9.9070740$$

$$\frac{1}{2}(PS + PB) = 53^\circ 50' 24'', \quad \text{Log Sec} = 0.2291169$$

$$\frac{1}{2}P = 44^\circ 32' 38.5'', \quad \text{Log Cot} = 0.0069127$$

$$\text{Log } \text{tg } \frac{1}{2}(P + C) = 0.1431086$$

$$\frac{1}{2}(P + C) = 54^\circ 16' 24''.2$$

$$\frac{1}{2}P = 44^\circ 32' 38.5''$$

waaruit

$$\epsilon = 17^\circ 38' 5''.4, \quad 90 + \frac{1}{2}\epsilon = 98^\circ 49' 2''.7$$

$$\text{Inhoud bolvormige driehoek } PSB = \pi R^2 \frac{\epsilon}{180^\circ}.$$

$$\text{Log } \pi R^2 = 7.5696977$$

$$\text{Log } \epsilon = 63485''.4 = 4.8026744$$

$$\text{Col } 64800'' = 4.1884250 - 10$$

$$6.5607971, \quad \text{Inhoud } PSB = 3637450.0$$

$$\text{Inhoud segment } TSB = \pi R^2 \text{Sinv. SB} \frac{S}{180^\circ}.$$

$$\text{Log } \pi R^2 = 7.5696977$$

$$\text{Sinv. SB} = 0.995152, \quad \text{Log} = 9.9978894$$

$$\text{Log } S = \text{Log } 63640 = 4.8037302$$

$$\text{Col } 64800'' = 4.1884250$$

$$6.5597423, \quad \text{Inhoud } TSB = 3628626.0$$

$$PSB - TSB = 8824.0$$

$$PC_0 B, \text{ volgens de tweede manier} = 1286645.0$$

$$\text{Rest, bedekte gedeelte der zon} = 1277821$$

*Log* bedekte gedeelte der zon = 6.1064700  
 Inhoud van het dubbel octant van den bol =

$$\pi R^2 \times \frac{180}{360} \times \text{Sinv. SB};$$

$$\text{Log } \pi R^2 = 7.5696977$$

$$\text{Log } \frac{180}{360} = 9.6989700$$

$$\text{Log Sinv SB} = 9.9978894 \qquad \text{Log } \Delta = 7.2665571$$

$$\text{Log verhouding} = 8.8399129$$

dus de gevraagde verhouding = 0.0691692

of het  $\frac{1}{14.4568}$  gedeelte der zichtbare zonsoppervlakte.

(Wordt vervolgd.)

# KLEINERE MEDEDEELINGEN.

---

## OVER HET GEBRUIK VAN DETERMINANTEN BIJ DE METHODE DER KLEINSTE KWADRATEN,

DOOR

P. VAN GEER.

---

Onder denzelfden titel, als hierboven is gesteld, verscheen in het eerste deel van dit tijdschrift (Dl. I, bladz. 179—188) een opstel van mijne hand, waarin het groote voordeel van de toepassing der determinanten bij de methode der kleinste kwadraten werd uiteengezet. Onlangs werd hetzelfde onderwerp behandeld door prof. GLAISHER in Cambridge (*Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. XL, n°. 9 en Vol. XLI, n°. 1); en dit geeft mij aanleiding thans nogmaals hierop terug te komen.

De heer GLAISHER toch erkent dat mijn opstel het eerste en tot zoover eenigste was over dit gewichtige onderwerp; zijne behandeling stemt geheel met de mijne overeen, zoo ook de verkregen uitkomsten. In eene noot vestigt hij de aandacht op eene vergissing van mijne zijde in de schrijfwijze der determinanten, die de gewichten der uitkomsten voorstellen. Gaarne geef ik dit toe; voor den Engelschman, die blijkbaar alleen de vergelijkingen naging zonder den tekst te kunnen volgen, was zij van meer gewicht dan werkelijk het geval is. Want in den tekst staat uitdrukkelijk, dat de minoren van den hoofddeterminant moeten genomen worden; doch bij vergissing is de verkorte schrijfwijze dezer minoren in § 2 verkeerd voorgesteld, omdat de rij van nullen is geplaatst volgens de hoofd diagonaal, in plaats van, zooals behoort en de bedoeling was, volgens de

rij van den term, wiens minor wordt genomen. Dat het slechts eene vergissing en geene fout was, blijkt voldoende hieruit, dat de verdere uitkomsten juist zijn, en met die van den Engelschen wiskundige volkomen overeenstemmen.

Terwijl ik mij haast deze verklaring af te leggen en den goedgunstigen lezer verzoek de juiste schrijfwijze voor de verkeerde te herstellen, wensch ik hieraan nog een en ander toe te voegen naar aanleiding van eenige verdere uitkomsten, die door den heer GLAISHER zijn verkregen. Zij vloeien op zulk eene eenvoudige wijze uit de door mij vooropgestelde vergelijkingen en gevolgde oplossings-methode voort, dat slechts eene korte berekening noodig is om ze af te leiden, waartoe ik thans onmiddellijk overga.

Voor betere aansluiting zal ik in het kort, met behoud der schrijfwijze, de in mijn eerste opstel verkregen uitkomsten samenvatten.

De oorspronkelijke vergelijkingen zijn

[illegible]



Bij ontleding geeft hij een aantal van  $m^n$  enkelvoudige determinanten; doch diegene, waarin twee gelijkgeplaatste kolommen voorkomen zijn blijkbaar nul, zoodat er een aantal  $m(m-1)\dots(m-n+1)$  overblijven.

Met ter zijde stelling van deze opmerking nemen wij uit  $\Delta$  de groep

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2, & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \\ & \dots a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n, \\ b_1 a_1 + b_1 a_2 + \dots + b_n a_n, & b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2, \\ & \dots b_1 p_1 + b_2 p_2 + \dots + b_n p_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 a_1 + p_1 a_2 + \dots + p_n a_n, & p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_n b_n, \\ & \dots p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2. \end{vmatrix}$$

Waarvoor geschreven kan worden

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ b_1 b_2 \dots b_n \\ \dots \\ p_1 p_2 \dots p_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ b_2 b_3 \dots b_n \\ \dots \\ p_1 p_2 \dots p_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}^2$$

Het aantal dezer groepen, in  $\Delta$  begrepen, is gelijk het aantal combinatiën  $n$  aan  $n$  van  $m$  elementen, zoodat kan geschreven worden

$$\Delta = \sum \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}^2,$$

waarin het teeken  $\Sigma$  zich over al deze combinatiën uitstrekt. Elk der groepen bevat  $1.2.3 \dots n$  enkelvoudige determinanten, die niet nul zijn; dit getal vermenigvuldigd met het aantal combinatiën geeft juist het bovengenoemd aantal enkelvoudige determinanten van  $\Delta$ .

De determinanten, die in de tellers van de uitdrukkingen voor de onbekenden voorkomen, kunnen op overeenkomstige wijze worden hervormd.

Nemen wij b. v.



$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3 + \dots + a_n F_n, & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \\ \dots a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n, & \\ b_1 F_1 + b_2 F_2 + b_3 F_3 + \dots + b_n F_n, & b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2, \\ \dots b_1 p_1 + b_2 p_2 + \dots + b_n p_n, & \\ \dots & \\ p_1 F_1 + p_2 F_2 + p_3 F_3 + \dots + p_n F_n, & p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_n b_n, \\ \dots p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2, & \end{vmatrix}$$

dan blijkt, dat hij ontbonden kan worden in groepen als deze

$$\begin{vmatrix} a_1 F_1 + a_2 F_2 + \dots + a_n F_n, & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \\ \dots a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n, & \\ b_1 F_1 + b_2 F_2 + \dots + b_n F_n, & b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2, \\ \dots b_1 p_1 + b_2 p_2 + \dots + b_n p_n, & \\ \dots & \\ p_1 F_1 + p_2 F_2 + \dots + p_n F_n, & p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_n b_n, \\ p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2, & \end{vmatrix}$$

waarvoor geschreven kan worden

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ b_1 b_2 \dots b_n \\ \dots \\ p_1 p_2 \dots p_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_1 F_2 \dots F_n \\ b_1 b_2 \dots b_n \\ \dots \\ p_1 p_2 \dots p_n \end{vmatrix} \text{ of } \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_n \\ \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_1 b_1 \dots p_1 \\ F_2 b_2 \dots p_1 \\ \dots \\ F_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}.$$

Alle overeenkomstige groepen worden gevormd door de combinatie der  $m$  grootheden  $n$  aan  $n$ ; met het oog hierop kan geschreven worden

$$\Delta_1 = \Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_1 b_1 \dots p_1 \\ F_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \\ F_n b_n \dots p_n \end{vmatrix},$$

waarin het teeken  $\Sigma$  zich over al deze combinatiën uitstrekt.

Hieruit volgt dat de waarschijnlijke waarden der onbekenden in dezen vorm kunnen gebracht worden

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \Sigma \left| \begin{array}{c} F_1 b_1 \dots p_1 \\ F_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ F_n b_n \dots p_n \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{array} \right| : \Sigma \left| \begin{array}{c} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{array} \right|^2, \\
 X_2 &= \Sigma \left| \begin{array}{c} a_1 F_1 \dots p_1 \\ a_2 F_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n F_n \dots p_n \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{array} \right| : \Sigma \left| \begin{array}{c} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{array} \right|^2, \\
 \dots \dots \dots \\
 X_n &= \Sigma \left| \begin{array}{c} a_1 b_1 \dots F_1 \\ a_2 b_2 \dots F_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots F_n \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{array} \right| : \Sigma \left| \begin{array}{c} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{array} \right|^2.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Neemt men nu uit het stelsel vergelijkingen (1) de  $n$  eerste, en lost daaruit de onbekenden op, dan wordt, deze bijzondere waarde door  $\xi$  aanwijzende,

$$\xi_1 = \frac{\left| \begin{array}{c} F_1 b_1 \dots p_1 \\ F_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ F_n b_n \dots p_n \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{array} \right|}, \quad \xi_2 = \frac{\left| \begin{array}{c} a_1 F_1 \dots p_1 \\ a_2 F_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n F_n \dots p_n \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{array} \right|}, \quad \xi_n = \frac{\left| \begin{array}{c} a_1 b_1 \dots F_n \\ a_2 b_2 \dots F_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots F_n \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{array} \right|}. \quad (9)$$

Noemt men hierin den teller  $T$  en den noemer  $N$ , zoodat

$$\xi_1 = \frac{T_1}{N}, \quad \xi_2 = \frac{T_2}{N}, \quad \xi_3 = \frac{T_3}{N}, \dots \xi_n = \frac{T_n}{N}, \dots \quad (10)$$

dan kunnen de waarschijnlijke waarden uit (8) aldus geschreven worden

$$X_1 = \frac{\Sigma N^2 \xi_1}{\Sigma N^2}, \quad X_2 = \frac{\Sigma N^2 \xi_2}{\Sigma N^2}, \dots X_n = \frac{\Sigma N^2 \xi_n}{\Sigma N^2}; \dots \quad (11)$$





bekenden, dan bestaat de teller van den laatsten vorm slechts uit één vierkant, dat gemakkelijk kan bepaald worden. Noemen wij de waarschijnlijke fout van elk der onbekenden  $r$ , dan is, volgens de theorie der waarschijnlijkheidsrekening.

$$r_1^2 = \frac{\Sigma q^2}{G_1}, \dots r_n^2 = \frac{\Sigma q^2}{G_n}.$$

Door substitutie uit (6), (7) en (13) wordt dit

$$r_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} (bb)(bc) \dots (bp) \\ \dots \dots \dots \\ (pb)(pc) \dots (pp) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (aa)(ab) \dots (ap)(aF) \\ (ba)(bb) \dots (bp)(bF) \\ \dots \dots \dots \\ (aF)(bF) \dots (pF)(FF) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (aa)(ab) \dots (ap) \\ (ba)(bb) \dots (bp) \\ \dots \dots \dots \\ (pa)(pb) \dots (pp) \end{vmatrix}^2}; \dots (15)$$

en overeenkomstige uitdrukkingen voor de andere waarschijnlijke fouten.

Men merke hierbij op, dat de teller bestaat uit het produkt van twee determinanten, één van den  $(n-1)^{\text{sten}}$  en een van den  $(n+1)^{\text{den}}$  graad; de noemer uit het vierkant van een determinant van den  $n^{\text{den}}$  graad.

Ook in den laatsten vorm kunnen de determinanten door sommen vervangen worden; door steeds dezelfde transformatie-methode toe te passen, zal men nu verkrijgen

$$r_1^2 = \frac{\Sigma \begin{vmatrix} b_1 c_1 \dots p_1 \\ b_2 c_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ b_{n+1} c_{n+1} \dots p_{n+1} \end{vmatrix}^2 \cdot \Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \dots p_1 F_1 \\ a_2 b_2 c_2 \dots p_2 F_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n c_n \dots p_n F_n \\ a_{n+1} b_{n+1} c_{n+1} \dots p_{n+1} F_{n+1} \end{vmatrix}^2}{\Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}^2 \cdot \Sigma \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 \dots p_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots p_n \end{vmatrix}^2} \dots (16)$$

enz.; waardoor alle grootheden, die bij de oplossing van het stelsel vergelijkingen van belang zijn, in overeenkomstige symmetrische vormen zijn uitgedrukt.

## ONDERWERPEN BEHANDELD OP DE WETENSCHAP- PELIJKE WINTERVERGADERINGEN.

---

1879. 26 November. Over de theorie der rechte lijnen. Door Dr. A. KETTNER.

1880. 21 Januari. Eene algemeene beschouwing van alle coördinatenstelsels, naar aanleiding van een geschrift van den Rus J. SOMOFF. De beschouwing is gebaseerd op de puntfunctie  $V(m)$ , eene veranderlijke grootheid, die op bepaalde wijze afhangt van de plaats van een punt in de ruimte. Door Prof. C. J. MATTHES.

Eene betrekking tusschen de coëfficiënten van BERNOULLI, telkens met overspringen van twee, naar aanleiding van een opstel van Prof. v. D. BERG. Door Dr. A. KETTNER.

Over de methode om de omhullende te vinden van eene kromme met veranderlijken parameter, ingezonden door den Heer C. CORNEILLE LANDRÉ. Ingeleid door Dr. A. KETTNER.

Welk punt op den omtrek van den cirkel om een driehoek beschreven, moet men kiezen, opdat het voetpunt van één loodlijn daaruit op de zijden neergelaten, ligt midden tusschen de twee andere voetpunten. Er zijn drie zulke punten. Analytisch wordt een punt O gevonden binnen den driehoek; lijnen uit de hoekpunten door O getrokken snijden den cirkel in de gevraagde punten. O is het snijpunt der lijnen die de middens der zijden vereenigen met de middens der bij die zijden behoorende hoogtelijnen. Ingezonden door den Heer J. W. TESCH. Ingeleid door Dr. N. P. KAPTEYN.

1880. 10 Maart. De onmogelijkheid van de algemeene oplossing der vijfde machts-vergelijking. Historisch overzicht. Het onderzoek van ABEL over de vraag: „wanneer kunnen de wortels van wortelvormen worden voorgesteld door eene rationele functie der wortels.” Door Prof. A. J. VAN PESCH.

1880. 1 December. Over staventoestel ter illustratie van de Wet van SNELLIUS. Over reintoestel van WESTINGHOUSE. Bij beide onderwerpen worden de besproken voorwerpen in natura vertoond. Door Dr. N. P. KAPTEYN.

Welke is de waarschijnlijkheid dat: eene homogene staaf in drie stukken brekende, met de stukken als zijden een driehoek kan gevormd worden; kans  $= \frac{1}{4}$ . Evenzoo in vier stukken brekende, de kans dat met drie stukken willekeurig genomen weer een driehoek kan gevormd worden; kans  $= \frac{4}{27}$ .

Verschillende oplossingen door Prof. A. J. v. PESCH.

1881. 19 Januari. Eene uitbreiding van het theorema van ROLLE (verband tusschen de wortels van  $F(x) = 0$  en die van de afgeleide  $F'(x) = 0$ .) Dit theorema wordt uitgebreid op 't geval van imaginaire wortels in  $F(x)$ . Er wordt gevonden de eigenschap: Al de wortels van de afgeleide functie liggen binnen den reethoek geconstrueerd, met zijden evenwijdig aan de assen door of om de wortels van de oorspronkelijke functie. Door Dr. G. J. LEGEBEKE.

Over imaginaire grootheden. Bewijs langs meetkundigen weg dat men met imaginaire vormen dezelfde bewerkingen mag volvoeren als met reële.

Toepassingen 1°. Afleiding Theorema DE MOIVRE.

2°. Iedere hoogere machtsvergelijking heeft een wortel.

Door den Heer COHEN KAZ,

1881. 16 Februari. 1°. Bewijs van een stereometrisch analogon van de stelling van PAPPUS, luidende:

Wanneer op de opstaande zijvlakken eener piramide als grondvlakken prismata worden geconstrueerd, wier bovenvlakken elkaar in één punt P snijden, is de som van de inhouden dier prismata gelijk aan dat van een prisma, dat het grondvlak der piramide tot grondvlak heeft, en wiens opstaande ribben gelijk en evenwijdig zijn met de lijn, die het punt P verbindt met den top der piramide. (Bij eene driehoekige piramide zijn de prismata geheel willekeurig.)

2°. Construeert men op de zijden van een willekeurigen driehoek gelijkvormige ruiten, op dezelfde manier geplaatst, en verbindt de naastliggende vrije hoekpunten dier ruiten; dan ontstaat een zeshoek; construeer op de zijden van dien zeshoek, die niet aan een ruit behooren, weer ruiten, enz.; dan zal:

a. de ruimte tusschen twee opvolgende zeshoeken bestaan uit ruiten en trapezia;

b. de inhoud der trapezia in denzelfden kring gelijk zijn;

c. deze inhouden geheel veelvouden zijn van den inhoud des driehoeks. Door Dr. M. C. PARAIIRA.

Over wederkeerige reeksen. Reeksen van bijzonderen aard. Door Dr. D. v. LANKREEN MATTHES.

Over derdemachts-lijnen. Door den Heer A. N. GODEFROY.

1881. 23 Maart. Vraagstuk: Gegeven 1°. de breedte van plaats A; 2°. het azimuth van plaats A' t. o. v. A; 3°. afstand AA', te berekenen de breedte van A'. De oplossing in de onderstelling, dat de aarde niet een bol, maar eene omwentelingseïlloïde is. Door Prof. F. J. STAMKART.

1881. 2 November. De rekenwerktuigen:

- a. het telbord als oudste rekenwerktuig;
- b. de Neperiaansche staafjes;
- c. rekenmachine van PASCAL, 1642;
- d. logarithmische lineaal, 18<sup>de</sup> eeuw;
- e. werktuig van BABBAGE, 1812, berustende op het bepalen van de termen eener reeks vierde orde;

f. rekenwerktuig van THOMAS, uitgevonden in de eerste helft dezer eeuw. Het werktuig zelf wordt ter tafel gebracht en de inrichting door teekeningen opgehelderd. Door Prof. A. J. v. PESCH.

1881. 14 December. Over kromme lijnen, beschouwd als projectiën van lijnen in de ruimte. De projectiën verkregen door stralenbundels.

Door toepassing van deze eenvoudige wijze van projecteeren worden een groot aantal bekende, soms zeer zamengestelde kromme lijnen gevonden. Bovendien wordt telkens de ligging der tangenten in elk punt der kromme door constructie bepaald. Door den Heer A. N. GODEFROY.

VRAAGSTUK I. Construeer een vierhoek, indien gegeven zijn twee overstaande zijden, twee overstaande hoeken, "beiden  $= 90^\circ$ ", en de diagonaal tusschen de hoekpunten van genoemde hoeken. Opgegeven door C. KNAPPEB KZ.

Mededeeling van een paar eenvoudige proeven ter opheldering van de physische beschouwing van den regenboog. Door Dr. N. P. KAPTEYN.

VRAAGSTUK II. Een bol rust op een horizontaal vlak en wordt beschenen door een lichtbron (punt) gelegen in de loodlijn van het raakpunt. Waar moet dit punt liggen, opdat de schaduw op het horizontale vlak gelijk zij aan het verlichte gedeelte van den bol? (Dit vraagstuk is voor eenige jaren opgegeven ter schriftelijke oplossing bij Eindexamen H. B. S.) Bij oplossing vindt men een punt buiten en



een binnen den bol. Wat is de beteekenis van dit laatste punt. Door Dr. A. KETTNER.

1882. 25 Januari. Over de vergelijking van het raakvlak volgens de bepaling van HERMANN SCHEFFLER. (Eene bepaling, die ook en vooral rekening houdt met de raakvlakken in bijzondere punten). De bepaling behelst het navolgende:

Breng door het te raken punt twee willekeurige vlakken dicht bij elkaar. De raaklijnen aan de doorgangen van deze vlakken en het oppervlak bepalen een plat vlak. Bij nadering der twee willekeurige vlakken is de limiet van genoemd plat vlak het gezochte raakvlak.

De vergelijking wordt mathematisch ontwikkeld, en ten slotte toegepast op het geval van een raakvlak aan een bol. Door Dr. A. KETTNER.

Bespreking van Vraagstuk II. (Vergadering 14 December 1881.)

Het punt binnen den bol behandeld als oplossing van een zuiver wiskundig vraagstuk. Door Dr. J. RINGELING.

1882. 22 Februari. Ontwikkeling eener nieuwe formule voor den inhoud van het viervlak.

Noemt men twee tegenover elkaar staande ribben  $l$  en  $l'$ , de standhoeken op deze ribben  $\alpha$  en  $\alpha'$ , de zijvlakken A, B, C en D, dan verkrijgt men algemeen

$$\frac{2}{3} I = \frac{\sqrt{(S-A)(S-B)(S-C)(S-D) - A \cdot B \cdot C \cdot D \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')}}{l + l'}$$

en dus voor 't bijzondere geval  $\alpha + \alpha' = 180^\circ$ ,

$$\frac{2}{3} I = \frac{\sqrt{(S-A)(S-B)(S-C)(S-D)}}{l + l'}. \text{ Door den Heer G. BAKKER.}$$

Het raakvlak (volgens bepaling HERMANN SCHEFFLER) aan de bijzondere punten van het golfoppervlak van 't licht bij tweecassige kristallen. Door Dr. PARATTA.

1882. 22 Maart. De beteekenis van het eerste lid der op 0 herleide vergelijking van den tweeden graad met twee veranderlijken, indien voor  $x$  en  $y$  gesubstitueerd worden de coördinaten van een willekeurig punt.

Beschouwing van het algemeene geval. Toepassing op de bijzondere gevallen van rechte lijn en kegelsneden. Door den Heer G. DE VRIES.

Over eene eenvoudige uitdrukking voor den kromtestraal van ontwordenen van kromme lijnen. Door Prof. A. J. v. PESCH.

Het raakvlak volgens bepaling SCHEFFLER. Eenvoudige ontwikkeling der vergelijking, door uit te gaan van de beschouwing, dat dit vlak moet gaan door het raakpunt en twee punten op twee elkaar opvolgende raaklijnen. Door Prof. A. J. v. PESCH.

# OVER HET QUADRATISCHE REST-KARAKTER VAN HET GETAL 2,

DOOR

T. J. STIELTJES Jr.

1. Zij  $p$  een oneven priemgetal. De getallen kleiner dan  $p$ , met uitzondering van  $p-1$ ,

$$1, 2, 3, \dots, p-2,$$

kunnen in twee groepen verdeeld worden, al naar gelang ze quadratische resten of niet-resten van  $p$  zijn. De eerste groep

$$a, a', a'', \dots \quad (A)$$

bevat dan al de resten, de tweede groep

$$b, b', b'', \dots \quad (B)$$

alle niet-resten, die onder de getallen  $1, 2, \dots, p-2$  voorkomen. Is dus  $p-1$  of  $-1$  quadratische rest, dan bevat de groep (A) alle resten van  $p$  behalve  $p-1$ , en de groep (B) bestaat uit de gezamenlijke niet-resten van  $p$ . Is daarentegen  $-1$  quadratische niet-rest, dan bestaat de groep (A) uit alle resten, de groep B uit alle niet-resten met uitzondering van  $p-1$ . In het eerste geval bevat dus de groep (A)  $\frac{p-3}{2}$ , de groep (B)  $\frac{p-1}{2}$  getallen, in het tweede geval bevat (A)  $\frac{p-1}{2}$ , (B)  $\frac{p-3}{2}$  getallen.

Maar het is nu gemakkelijk te zien, dat de groep (B) steeds uit een even aantal getallen bestaat. Men kan namelijk de getallen van (B) in paren vereenigen, door twee getallen  $b$  en  $b'$  van (B) tot een paar te rekenen, wanneer

$$b' \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{is.}$$

De getallen van een paar zijn altijd ongelijk; want uit  $b = b'$  zou volgen  $b^2 \equiv 1$  dus  $b = 1$  of  $b = p-1$ , maar het getal 1 komt, als rest, nooit in den groep (B) voor, terwijl  $p-1$  noch in (A), noch in (B) voorkomt.

Is dus het geheele aantal niet-resten (*mod.*  $p$ )  $\frac{p-1}{2}$  even, dus  $p$  van den vorm  $4n+1$ , dan bevat (B) alle niet-resten van  $p$ , en  $-1$  is dus rest van  $p$ . Is daarentegen  $\frac{p-1}{2}$  oneven,  $p$  van den vorm  $4n+3$ , dan is noodzakelijk  $-1$  niet-rest  $p$ .

Te gelijk volgt nu, dat voor  $p = 4n+1$ , (A) alle resten, behalve de rest  $p-1$ , bevat; het aantal der getallen (A) is  $2n-1$ ; — (B) alle niet-resten bevat; hun aantal is  $= 2n$ ;

en voor  $p = 4n+3$ , (A) alle resten bevat; hun aantal is  $2n+1$ ; — (B) alle niet-resten, behalve de niet-rest  $p-1$ , bevat; het aantal der getallen (B) is  $2n$ .

2. Door bij alle getallen  $a, a', a'', \dots b, b', b'', \dots$  de éénheid op te tellen, ontstaan de groepen van getallen

$$a+1, a'+1, a''+1, \dots \quad (A')$$

$$b+1, b'+1, b''+1, \dots \quad (B')$$

die te samen alle getallen

$$2, 3, 4, \dots p-1$$

vormen; zoodat in (A') en (B') te samen voorkomen: de  $\frac{p-1}{2}$  niet-resten en  $\frac{p-3}{2}$  resten van  $p$ , namelijk alle resten behalve 1.

Het aantal der getallen (B') is even, en onder de getallen van (B') komen evenveel resten als niet-resten van  $p$  voor. Want zijn  $b$  en  $b'$  twee getallen van (B) die een paar vormen,

$$bb' \equiv 1,$$

dan is

$$b+1 \equiv b(b'+1),$$

en daar  $b$  niet-rest is, zoo is één der getallen  $b+1, b'+1$  rest, het andere niet-rest.

In verband met het voorgaande volgt, dat voor  $p = 4n+1$ ,

$$(B') \text{ bestaat uit } \frac{p-1}{4} = n \text{ resten,}$$

$$\text{en } \frac{p-1}{4} = n \text{ niet-resten,}$$

en derhalve (A') uit  $\frac{p-5}{4} = n-1$  resten,

en  $\frac{p-1}{4} = n$  niet-resten.

Is echter  $p = 4n+3$ , dan bevat

(B')  $\frac{p-3}{4} = n$  resten en  $n$  nietresten,

derhalve (A')  $\frac{p-3}{4} = n$  resten en  $\frac{p+1}{4} = n+1$  niet-resten.

3. Het quadratische restkarakter van 2 kan nu als volgt bepaald worden. De gevallen  $p = 4n+1$ ,  $p = 4n+3$  moeten afzonderlijk behandeld worden.

I.  $p = 4n+1$ .

In dit geval bevat (B) alle niet-resten van  $p$ , dus

$$(x-b)(x-b')(x-b'') \dots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} + 1 \pmod{p}.$$

Stelt men hierin  $x = -1$  dan volgt

$$(b+1)(b'+1)(b''+1) \dots \equiv 2 \pmod{p}.$$

Maar volgens N°. 2 komen onder de  $2n$  getallen  $b+1$ ,  $b'+1$ ,  $\dots$   $n$  niet-resten voor, terwijl de overigen resten zijn.

Is dus  $n$  even of  $p = 8k+1$ ,  
dan is 2 rest van  $p$ .

Is  $n$  oneven of  $p = 8k+5$ ,  
dan is 2 niet-rest van  $p$ .

II.  $p = 4n+3$ .

In dit geval bevat (A) alle resten van  $p$ , dus

$$(x-a)(x-a')(x-a'') \dots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \pmod{p}.$$

Stelt men hierin  $x = -1$ , dan volgt

$$(a+1)(a'+1)(a''+1) \dots \equiv 2 \pmod{p}.$$

Maar volgens N°. 2.. komen onder de  $2n+1$  getallen  $a+1$ ,  $a'+1$ ,  $\dots$   $n+1$  niet-resten voor, terwijl de overigen resten zijn.

Is dus  $n$  even of  $p = 8k+3$ ,  
dan is 2 niet-rest van  $p$ .

Is  $n$  oneven  $p = 8k+7$ ,  
dan is 2 rest van  $p$ .

# BEWIJS VAN DE STELLING, DAT EEN GEHEELE RATIONALE FUNCTIE ALTIJD, VOOR ZEKERE REËLE OF COMPLEXE WAARDEN VAN DE VERANDERLIJKE, DE WAARDE NUL AANNEEMT,

DOOR

**T. J. STIELTJES Jr.**



Het volgende bewijs van dit fundamenteel-theorema der stekunde, heeft, in zooverre de hulpmiddelen der integraalrekening te hulp groepen worden, eenige verwantschap met het derde bewijs van GAUSS (GAUSS' *Werke*, Bd. III, Seite 59) De wijze echter, waarop de tegenspraak afgeleid wordt uit de onderstelling, dat de stelling niet waar was, is hier geheel anders.

Zij  $f(z) = z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} + \dots$  een geheele rationale functie van den  $n^{\text{den}}$  graad, en voor  $z = x + yi$

$$f(z) = u + vi.$$

De functies  $u$  en  $v$ , die geheel rationaal in  $x$  en  $y$  zijn, hebben dan de voor het volgende wezenlijke eigenschap, dat hoe groot een getal  $A$  ook gegeven is, men altijd een getal  $R$  zóó groot kan bepalen, dat voor alle waarden van  $x$  en  $y$ , die aan de voorwaarde

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

voldoen,  $u^2 + v^2$  grooter dan  $A$  is.

Het is niet noodig bij het bewijs van deze bekende eigenschap stil te staan; en ik bemerk hier alleen, dat zij ten slotte daarop berust, dat de „norm” van het product van twee complexe getallen gelijk is aan het product der normen van de factoren, en dat dus wanneer

$$(x + yi)^n = p + qi$$

is, tegelijkertijd identisch  $(x^2 + y^2)^n = p^2 + q^2$  is.

Bewezen moet worden, dat er (reële) waarden van  $x$  en  $y$  zijn, die gelijktijdig  $u = 0$  en  $v = 0$  maken.

Inderdaad, bestonden er zulke waarden niet, dan zoude

$$v = lg(u^2 + v^2)$$

eene functie van  $x$  en  $y$  zijn, die de volgende eigenschappen had.

Ten eerste,  $w$  zou voor alle waarden van  $x$  en  $y$  eindig en continue zijn, en gedeeltelijke afgeleiden naar  $x$  en  $y$  hebben van alle orden, die evenzeer eindig en continue zijn voor alle waarden van  $x$  en  $y$ .

Ten tweede, de functie  $w$  voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Dit laatste is duidelijk, wanneer men bedenkt, dat  $\frac{1}{2} Lg(u^2 + v^2)$  het reële deel is van de functie  $Lgf(z)$  van de complexe veranderlijke  $z$ . Maar men kan het ook direct toelichten, wanneer men bedenkt dat

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

is. Men heeft namelijk

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2 \frac{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x}}{u^2 + v^2} = 2 \frac{u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}}{u^2 + v^2} = 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \text{Arctg} \frac{v}{u} \right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2 \frac{u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y}}{u^2 + v^2} = 2 \frac{-u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}}{u^2 + v^2} = -2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \text{Arctg} \frac{v}{u} \right),$$

dus 
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Maar voor de functien, die de eigenschappen hebben, waaraan hier  $w$  voldoet, geldt een theorema, dat, — wanneer men de veranderlijken  $x$  en  $y$  meetkundig voorstelt, door de punten in een vlak, waarbij de veranderlijken  $x$  en  $y$  rechthoekige coördinaten zijn, — daarin bestaat, dat de waarde van de functie in een willekeurig punt even groot is als het gemiddelde der waarden, die de functie aanneemt op den omtrek van een cirkel, waarvan dat punt het middelpunt is. Dus scherper in een analytische formule uitgedrukt

$$w(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(x_0 + R \cos \phi, y_0 + R \sin \phi) d\phi.$$

(Zie bijv. RIEMANN's *Inaug. Diss.* Art. 10, *Gesamm. Werke*, Seite 20.) Maar dit voert hier blijkbaar tot eene ongerijmdheid, want men kan  $R$  altijd zoo groot aannemen, dat

$$w(x_0 + R \cos \phi, y_0 + R \sin \phi) = Lg(u^2 + v^2)$$

voor alle waarden van  $\phi$ , grooter is dan een geheel willekeurig aan te nemen getal.

De onderstelling, dat er geene waarden van  $x$  en  $y$  zijn, die tegelijkertijd  $u = 0$  en  $v = 0$  maken, moet dus valsch zijn.

# OVER EEN ALGORITHMUS VOOR HET MEETKUNDIG MIDDEN,

DOOR

T. J. STELTJES Jr.

In Het 89<sup>de</sup> Deel van het *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Seite 343), heb ik eene rekenwijze aangegeven, waardoor het mogelijk is, wanneer  $k$  positieve getallen  $a_1, a_2, \dots, a_k$  gegeven zijn, uit deze getallen, op rationeele wijze,  $k$  andere getallen  $b_1, b_2, \dots, b_k$  af te leiden, zoodanig dat  $a_1 a_2 \dots a_k = b_1 b_2 \dots b_k$  is, en de verschillen tusschen de getallen  $b_1, b_2, \dots, b_k$  onderling zoo klein kunnen zijn, als men verkiest.

Ik stel mij voor in het volgende op dit onderwerp terug te komen, en de bewijzen mede te deelen van hetgeen in die korte noot is uitgesproken.

1. Zij dan, wanneer  $a_1, a_2, \dots, a_k$  willekeurige reële getallen zijn  $M_1$  hun rekenkundig midden, d. w. z. hun som gedeeld door hun aantal  $k$ ;  $M_2$  het rekenkundig midden van alle producten van twee verschillende der getallen  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , d. w. z. de som dezer producten gedeeld door hun aantal  $\frac{k(k-1)}{2}$ ; evenzoo  $M_3$  het rekenkundig midden van alle producten van drie verschillende der getallen  $a_1, a_2, \dots, a_k$  enz.; eindelijk  $M_k = a_1 a_2 \dots a_k$ .

Omtrent de getallen  $a_1, a_2, \dots, a_k$  wordt verder niets ondersteld, zoodat het ook gebeuren kan, dat meerdere dezer getallen gelijk zijn. Het is nauwelijks noodig te bemerken, dat daarom hierboven het woord verschillende niet betrekking heeft op de getallenwaarde van  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , maar wel op de aan deze getallen toegekende individualiteit.

Voor de gelijkvormigheid stel ik nog vast, dat  $M_0 = 1$  zal zijn. De uitdrukking

$$M_p^2 - M_{p-1} M_{p+1}, \quad p = 1, 2, 3, \dots, k-1,$$

is nu in het algemeen positief, of scherper uitgedrukt, deze uitdrukking is nooit negatief en alléén dan gelijk nul, wanneer of alle getallen  $a_1, a_2, \dots, a_k$  aan elkander gelijk zijn, of wanneer minstens  $k-p+1$  dezer getallen gelijk nul zijn, in welk geval blijkbaar  $M_p$  en  $M_{p+1}$  afzonderlijk gelijk nul zijn.

Deze eigenschap is in hoofdzaak sedert lang bekend, en voor eenige geschiedkundige bemerkingen hieromtrent kan ik volstaan met te verwijzen naar een opstel van Dr. D. BIERENS DE HAAN, in het 8<sup>ste</sup> Deel der *Verslagen en mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen*, Afdeling Natuurkunde, (Amsterdam 1858, blz. 248—260). Men zie ook het opstel van LOBATTO in het 9<sup>de</sup> deel dier Verslagen enz., blz. 92—106.

Voor het gemak van den lezer, en ook om de grensgevallen, waarin de uitdrukking gelijk nul wordt, volledig te behandelen, laat ik hier echter het bewijs van het boven gezegde volgen.

$$2. \text{ Zij } f(x) = (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_k),$$

$$\text{of } f(x) = M_0 x^k - \frac{k}{1} M_1 x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} M_2 x^{k-2} - \dots \pm M_k, \quad (1)$$

waar in het tweede lid het bovenste of onderste teeken te nemen is, al naardat  $k$  even of oneven is.

Volgens de onderstelling omtrent  $a_1, a_2, \dots, a_k$  heeft dan de vergelijking  $f(x) = 0$  slechts reële wortels, en hetzelfde geldt dus van de vergelijkingen, die vorderen dat de verschillende afgeleide functiën van  $f(x)$  de waarde nul aannemen. Daarom heeft ook de vergelijking

$$0 = M_0 x^{p+1} - \frac{p+1}{1} M_1 x^p + \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2} M_2 x^{p-1} - \dots \pm \frac{p+1}{1} M_p \mp M_{p+1} \quad (2)$$

alleen reële wortels, want deze vergelijking is niet wezenlijk verschil-

$$\text{lend van } 0 = \frac{d^{k-p-1} f(x)}{dx^{k-p-1}}.$$

Ik onderscheid nu deze drie gevallen.

1°.  $M_{p+1}$  is niet gelijk nul.

2°.  $M_{p+1} = 0$ , maar  $M_p$  is niet gelijk nul.

3°.  $M_{p+1} = 0$  en  $M_p = 0$ .

In het eerste geval zijn ook alle wortels van de vergelijking

$$0 = M_{p+1} x^{p+1} - \frac{p+1}{1} M_p x^p + \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2} M_{p-1} x^{p-1} - \dots \pm \frac{p+1}{1} M_1 x \mp M_0 \quad (3)$$



reël, en derhalve ook die van

$$0 = M_{p-1}x^2 - 2M_p x + M_{p+1}; \dots \dots \dots (4)$$

want het tweede lid dezer laatste vergelijking onderscheidt zich alleen door een standvastigen factor van de  $p-1^{\text{ste}}$  afgeleide van de functie, die het tweede lid van (3) uitmaakt. Uit de realiteit des wortels van (4) volgt nu

$$M_p^2 - M_{p-1}M_{p+1} \geq 0;$$

en wel is  $M_p^2 - M_{p-1}M_{p+1}$  alleen dan gelijk nul, wanneer de beide wortels van (4) gelijk zijn. Hiertoe is weder noodzakelijk en voldoende, dat alle wortels van (3), dus ook alle wortels van (2), aan elkaar gelijk zijn, wat weder medebrengt, dat alle wortels van  $f(x) = 0$  gelijk zijn, of  $a_1 = a_2 = \dots = a_k$ .

Is dus  $M_{p+1}$  niet  $= 0$ , dan is  $M_p^2 - M_{p-1}M_{p+1}$  altijd positief; behalve wanneer  $a_1 = a_2 = \dots = a_k$ , in welk geval de uitdrukking gelijk aan nul is.

In het tweede geval is blijkbaar  $M_p^2 - M_{p-1}M_{p+1}$  positief.

Eindelijk is in het derde geval deze uitdrukking gelijk aan nul, en heeft de vergelijking (2) minstens twee wortels gelijk nul; zoodat de vergelijking  $f(x) = 0$  minstens  $k-p+1$  wortels gelijk nul heeft; of m. a. w. in dit geval zijn minstens  $k-p+1$  der getallen  $a_1, a_2, \dots, a_k$  gelijk aan nul.

Hiermede is het in Art. 1 uitgesprokene volledig bewezen.

3. Van nu af onderstel ik dat  $a_1, a_2, \dots, a_k$  allen positief zijn, en stel

$$a_1' = M_1, \quad a_2' = \frac{M_2}{M_1}, \quad a_3' = \frac{M_3}{M_2}, \quad a_k' = \frac{M_k}{M_{k-1}}, \dots \dots (5)$$

zoodat de getroffen overeenkomst omtrent  $M_0$  veroorlooft te schrijven

$$a_p' = \frac{M_p}{M_{p-1}}, \quad p = 1, 2, \dots, k;$$

$$\text{waaruit volgt} \quad a_p' - a_{p+1}' = \frac{M_p^2 - M_{p-1}M_{p+1}}{M_{p-1}M_p},$$

dus

$$a_p' \geq a_{p+1}';$$

en wanneer ook de waarde nul voor  $a_1, a_2, \dots, a_k$  uitgesloten wordt, kan alleen dan  $a_p' = a_{p+1}'$  worden, wanneer  $a_1 = a_2 = \dots = a_k$ . Daar ook dit laatste geval geheel zonder belang is, kan het gevoegelijk buiten beschouwing blijven, en is derhalve

$$a_1' > a_2' > a_3' > a_4' \dots > a_k'; \dots \dots \dots (6)$$

terwijl uit (5) onmiddellijk volgt

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_k = a_1' a_2' a_3' \dots a_k' \dots \dots \dots (7)$$

Nu is blijkbaar  $a_1' = \frac{a_1 + a_2 \dots + a_k}{k}$ ,

$$a_k' = \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \dots + \frac{1}{a_k}};$$

en wanneer wij nu onderstellen, dat geen der getallen  $a_1', a_2', \dots, a_k$  grooter dan  $a_1$  en kleiner dan  $a_k$  is, zoo volgt

$$a_1' \leq \frac{(k-1)a_1 + a_k}{k} < a_1,$$

$$a_k' > a_k;$$

derhalve aftrekkende  $0 < a_1' - a_k' < \frac{k-1}{k} (a_1 - a_k) \dots \dots \dots (8)$

Leidt men nu uit  $a_1', a_2', \dots, a_k'$  een nieuwe groep van  $k$  getallen  $a_1'', a_2'', \dots, a_k''$  af, op dezelfde wijze als  $a_1', a_2', \dots, a_k'$  uit  $a_1, a_2, \dots, a_k$ ; evenzoo uit  $a_1'', a_2'', \dots, a_k''$  de getallen  $a_1''', a_2''', \dots, a_k'''$  enz.; dan is dus

$$a_1 > a_1' > a_2' \dots > a_k' > a_k,$$

$$a_1' > a_1'' > a_2'' \dots > a_k'' > a_k',$$

$$a_1'' > a_1''' > a_2''' \dots > a_k''' > a_k'',$$

enz.;

$$0 < a_1' - a_k' < \frac{k-1}{k} (a_1 - a_k),$$

$$0 < a_1'' - a_k'' < \frac{k-1}{k} (a_1' - a_k') < \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 (a_1 - a_k),$$

$$0 < a_1''' - a_k''' < \frac{k-1}{k} (a_1'' - a_k'') < \left(\frac{k-1}{k}\right)^3 (a_1 - a_k),$$

enz.;

$$a_1 a_2 \dots a_k = a_1' a_2' \dots a_k' = a_1'' a_2'' \dots a_k'' = a_1''' a_2''' \dots a_k''' = \dots;$$

en voor de  $n^{\text{de}}$  afgeleide groep van getallen,

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_k^{(n)},$$

heeft men  $a_1^{(n-1)} > a_1^{(n)} > a_2^{(n)} > \dots > a_k^{(n)} > a_k^{(n-1)},$

$$0 < a_1^{(n)} - a_k^{(n)} < \left(\frac{k-1}{k}\right)^n (a_1 - a_k),$$

$$a_1 a_2 \dots a_k = a_1^{(n)} a_2^{(n)} \dots a_k^{(n)}.$$

Daar nu

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^n,$$

bij onbepaald toenemende waarden van  $n$ , ten slotte zoo klein wordt als men verkiest, zoo volgt dat de getallen

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_k^{(n)},$$

allen voor  $n = \infty$  tot een gemeenschappelijke limiet convergeeren, die blijkbaar gelijk is aan het meetkundig midden van  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}.$$

4. Voor dat ik verder ga, zij het geoorloofd eenige getallen-voorbeelden te geven.

Eerste voorbeeld.  $k = 3$ .

$$\begin{aligned} a_1 &= 5, & a_2 &= 5, & a_3 &= 4, \\ a_1' &= \frac{14}{3}, & a_2' &= \frac{65}{14}, & a_3' &= \frac{60}{18}, \\ a_1'' &= \frac{7608}{1638}, & a_2'' &= \frac{35290}{7673}, & a_3'' &= \frac{16380}{3529}; \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} a_1'' &= 4.64163 \ 61416 \ 36 \dots, \\ a_2'' &= 4.64158 \ 88465 \ 08 \dots, \\ a_3'' &= 4.64154 \ 15131 \ 77 \dots \end{aligned}$$

Men ziet hoe snel de getallen van een zelfde groep tot elkaar naderen, immers

$$\begin{aligned} a_1' - a_2' &= 0.02380 \ 95 \dots, \\ a_2' - a_3' &= 0.02747 \ 25 \dots, \\ a_1'' - a_2'' &= 0.00004 \ 72951 \ 38 \dots, \\ a_2'' - a_3'' &= 0.00004 \ 73333 \ 31 \dots \end{aligned}$$

Het gemiddelde der waarden van de tweede afgeleide groep geeft

$$a_1''' = 4.64158 \ 88337 \ 74.$$

Later zal blijken dat het verschil  $a_1''' - a_3'''$  ongeveer 3 eenheden in de 10<sup>de</sup> decimaal bedraagt. Die limiet is hier

$$\sqrt[3]{100} = 4.64158 \ 88336 \ 12769 \dots$$

Tweede voorbeeld.  $k = 4$ .

$$\begin{aligned} a_1 &= 3, & a_2 &= 2, & a_3 &= 2, & a_4 &= 2, \\ a_1' &= \frac{9}{4}, & a_2' &= \frac{20}{9}, & a_3' &= \frac{11}{5}, & a_4' &= \frac{24}{11}, \\ a_1'' &= \frac{17531}{7920}, & a_2'' &= \frac{116410}{52593}, & a_3'' &= \frac{128826}{58205}, & a_4'' &= \frac{15840}{7157}; \end{aligned}$$

of

$$a_1' = 2.21351\ 01010\ 1,$$

$$a_2' = 2.21341\ 24313\ 1,$$

$$a_3' = 2.21331\ 50073\ 0,$$

$$a_4' = 2.21321\ 78287\ 0,$$

en

$$a_1' - a_2' = 0.02777\ 78,$$

$$a_2' - a_3' = 0.02222\ 22,$$

$$a_3' - a_4' = 0.01111\ 18,$$

$$a_1'' - a_2'' = 0.00009\ 76697\ 0,$$

$$a_1'' - a_3'' = 0.00009\ 74240\ 1,$$

$$a_3'' - a_4'' = 0.00009\ 71786\ 0.$$

Uit de waarden van  $a_1'', a_2'', a_3'', a_4''$  volgt

$$a_1''' = 2.21336\ 38420\ 8,$$

de limiet is

$$\sqrt[24]{24} = 2.21336\ 38394\ 007.$$

5. In de beide gegeven voorbeelden worden de verschillen der opvolgende getallen van een zelfde groep

$$a_1' - a_2', a_2' - a_3', \dots$$

$$a_1'' - a_2'', a_2'' - a_3'', \dots$$

niet alleen, bij overgang tot de volgende groepen, hoe langer hoe kleiner, maar de verschillen, die tot eenzelfde groep behooren, worden hierbij onderling hoe langer hoe minder verschillend.

Inderdaad kan men het volgende uitspreken.

Het quotient van elke twee der  $k-1$  verschillen

$$a_p^{(n)} - a_{p+1}^{(n)}, \quad p = 1, 2, 3, \dots, k-1,$$

convergeert voor  $n = \infty$  tot de limiet 1.

Van de verschillende bewijzen, die ik voor deze eigenschap vond, is het volgende verreweg het eenvoudigste.

6. Ik stel

$$a_1 = a - x_1,$$

$$a_2 = a - x_2,$$

$$a_3 = a - x_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_k = a - x_k,$$

waarin  $a$  een willekeurig getal is, en neme verder aan

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k,$$

zoodat ook geen twee der getallen  $a_1, a_2, \dots, a_k$  gelijk zijn. Verder zij

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k),$$

$$f(x) = N_0 x^k - \frac{k}{1} N_1 x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} N_2 x^{k-2} - \dots \pm N_k, \quad \dots (9)$$

zoodat de getallen  $N_0, N_1, \dots, N_k$  op dezelfde wijze uit  $x_1, x_2, \dots, x_k$  gevormd zijn als  $M_0, M_1, \dots, M_k$  uit  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Het kan tot geen onduidelijkheid aanleiding geven, dat  $f(x)$  hier en in het vervolg eene andere beteekenis heeft dan in Art. 2. Men overtuigt zich nu onmiddellijk, dat de getallen  $M_0, M_1, \dots, M_k$ , op de volgende wijze door middel van de functie  $f(x)$  en haar afgeleide functiën uitgedrukt kunnen worden

$$\left. \begin{aligned} M_k &= f(a), \\ k M_{k-1} &= f'(a), \\ k(k-1) M_{k-2} &= f''(a), \\ &\dots\dots\dots \\ k(k-1) \dots 3.2 M_1 &= f^{k-1}(a), \\ k(k-1) \dots 3.2.1 M_0 &= f^k(a), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

waaruit dus volgt

$$a_p' = \frac{p f^{k-p}(a)}{f^{k-p+1}(a)}, \quad p = 1, 2, \dots, k, \dots\dots\dots (11)$$

waarbij  $f^0(a) = f(a)$  te nemen is.

In plaats van (11) kan men ook schrijven

$$a_p' = \frac{N_0 a^p - \frac{p}{1} N_1 a^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} N_2 a^{p-2} - \dots}{N_0 a^{p-1} - \frac{p-1}{1} N_1 a^{p-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} N_2 a^{p-3} - \dots} \dots\dots\dots (12)$$

Ontwikkelt men deze waarde van  $a_p'$  volgens de afdalende machten van  $a$ , dan vindt men voor de eerste termen dezer ontwikkeling

$$a_p' = a - N_1 - \frac{(p-1)(N_1^2 - N_0 N_2)}{a} \dots\dots\dots (13)$$

De  $p$  reële ongelijke wortels der vergelijking van den  $p^{\text{den}}$  graad

$$f^{k-p}(x) = 0,$$

mogen genoemd worden  $y_1, y_2, \dots, y_p$  volgens hun grootte gerangschikt, dus

$$y_1 < y_2 < \dots < y_p.$$

Evenzoo mogen  $z_1 < z_2 < \dots < z_{p-1}$  de reële ongelijke wortels van de vergelijking  $f^{k-p+1}(x) = 0$  zijn, zoodat  $z_1$  tusschen  $y_1$  en  $y_2$ ,  $z_2$  tusschen  $y_2$  en  $y_3$ , ..., eindelijk  $z_{p-1}$  tusschen  $y_{p-1}$  en  $y_p$  ligt. Hierbij is dus  $p > 1$  te onderstellen. Volgens (11) is dan

$$a_p' = \frac{(a-y_1)(a-y_2) \dots (a-y_p)}{(a-z_1)(a-z_2) \dots (a-z_{p-1})},$$

en, wanneer men de deeling uitvoert en in gedeeltelijke breuken splitst, volgens (13)

$$a_p' = a - N_1 + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{A_k}{a - z_k}, \dots \dots \dots (14)$$

waarin

$$A_k = \frac{(z_k - y_1)(z_k - y_2) \dots (z_k - y_p)}{(z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_{p-1})} \dots (15)$$

In den teller van deze uitdrukking voor  $A_k$  zijn de factoren

$$(z_k - y_1), (z_k - y_2), \dots (z_k - y_p),$$

allen positief; daarentegen de overige factoren, ten getale van  $p - k$ ,

$$z_k - y_{k+1}, z_k - y_{k+2}, \dots z_k - y_{p-1},$$

allen negatief.

De negatieve factoren in den noemer van  $A_k$  zijn

$$z_k - z_{k+1}, z_k - z_{k+2}, \dots z_k - z_{p-1};$$

hun aantal is  $p - k - 1$ . Het aantal negatieve factoren in den teller van  $A_k$  is dus één grootter dan het aantal negatieve factoren in den noemer; derhalve zijn

$$A_1, A_2, A_3 \dots A_{p-1},$$

allen negatief, en daar

$$a - z_1 > a - z_2 > \dots > a - z_{p-1}$$

positief zijn, zoo volgt

$$a_p' < a - N_1 + \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1}}{a - z_1},$$

$$a_p' > a - N_1 + \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1}}{a - z_{p-1}}.$$

Nu is  $A_1 + A_2 \dots + A_{p-1}$  blijkbaar de coëfficiënt van  $\frac{1}{a}$  in de ontwikkeling van  $a_p'$ , volgens de afdalende machten van  $a$ ; dus volgens (13) gelijk aan  $-(p-1)(N_1^2 - N_0 N_2)$  en  $a - z_1$ , is kleiner dan  $a - z_1 = a_1$ ,  $a - z_{p-1}$  grootter dan  $a - z_k = a_k$ , terwijl  $a - N_1$  blijkbaar gelijk aan  $a_1'$  is; zoodat nu volgt

$$\left. \begin{aligned} a_p' &< a_1' - \frac{(p-1)(N_1^2 - N_0 N_2)}{a_1}, \\ a_p' &> a_k' - \frac{(p-1)(N_1^2 - N_0 N_2)}{a_k}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Voor  $p = 1$  heeft men blijkbaar de teekens  $>$  en  $<$  door het gelijkteeken te vervangen.

7. De afleiding der ongelijkheden (16) steunt wezenlijk op de bemerking dat  $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$  alle negatief zijn. Men kan dit laatste ook nog aldus aantoonen.

$$\text{Zij} \quad g(x) = (x-y_1)(x-y_2) \dots (x-y_p),$$

$$\text{dan is blijkbaar} \quad a_p' = \frac{p g(a)}{g'(a)},$$

$$\text{en} \quad \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x-y_1} + \frac{1}{x-y_2} + \dots + \frac{1}{x-y_p},$$

waaruit door differentiatie volgt

$$\frac{g(x)g''(x) - g'(x)g'(x)}{g(x)g(x)} = -\frac{1}{(x-y_1)^2} - \frac{1}{(x-y_2)^2} - \dots - \frac{1}{(x-y_p)^2},$$

en is, hierin  $x = z_k$  stellende, daar  $g'(z_k) = 0$  is,

$$\frac{g''(z_k)}{g(z_k)} = -\frac{1}{(z_k-y_1)^2} - \frac{1}{(z_k-y_2)^2} - \dots - \frac{1}{(z_k-y_p)^2}.$$

Nu is echter, zooals uit  $a_p' = \frac{p g(a)}{g'(a)}$  onmiddellijk volgt,

$$A_k = \frac{p g(z_k)}{g''(z_k)},$$

$$\text{dus} \quad \frac{p}{A_k} = -\frac{1}{(z_k-y_1)^2} - \frac{1}{(z_k-y_2)^2} - \dots - \frac{1}{(z_k-y_p)^2}.$$

8. Vervangt men in (16)  $p$  door  $p+1$ , dan verkrijgt men door verbinding der verschillende ongelijkheden

$$a_p' - a_{p+1}' < \frac{a_k + p(a_1 - a_k)}{a_1 a_k} (N_1^2 - N_0 N_2),$$

$$a_p' - a_{p+1}' > \frac{a_1 - p(a_1 - a_k)}{a_1 a_k} (N_1^2 - N_0 N_2),$$

dus daar  $p$  hoogstens  $= k-1$  is, en  $a_1 - a_k$  en  $N_1^2 - N_0 N_2$  positief zijn, zoo veel te meer

$$\left. \begin{aligned} a_p' - a_{p+1}' &< \frac{a_k + (k-1)(a_1 - a_k)}{a_1 a_k} (N_1^2 - N_0 N_2), \\ a_p' - a_{p+1}' &> \frac{a_1 - (k-1)(a_1 - a_k)}{a_1 a_k} (N_1^2 - N_0 N_2). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

In de uitdrukking rechts komt nu  $p$  niet meer voor.

Al de voorgaande ontwikkelingen blijven onveranderd, wanneer men de getallen  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , door  $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_k^{(n)}$  en tegelijkertijd  $a_1', a_2', \dots, a_k'$  door  $a_1^{(n+1)}, a_2^{(n+1)}, \dots, a_k^{(n+1)}$  vervangt.

Daar nu reeds bewezen is, dat  $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_k^{(n)}$  voor  $n = \infty$  tot een zelfde positieve limiet naderen, zoo kan men blijkbaar  $n$  altijd zóó groot nemen, dat

$$a_1^{(n)} - (k-1)(a_1^{(n)} - a_k^{(n)})$$

positief is, en dan volgt gemakkelijk

$$\frac{a_1^{(n)} - (k-1)(a_1^{(n)} - a_k^{(n)})}{a_k^{(n)} + (k-1)(a_1^{(n)} - a_k^{(n)})} < \frac{a_p^{(n+1)} - a_{p+1}^{(n+1)}}{a_q^{(n+1)} - a_{q+1}^{(n+1)}} < \frac{a_k^{(n)} + (k-1)(a_1^{(n)} - a_k^{(n)})}{a_1^{(n)} - (k-1)(a_1^{(n)} - a_k^{(n)})}. \quad (18)$$

Neemt men  $n$  groot genoeg, dan verschillen de beide waarden, waartusschen

$$\frac{a_p^{(n+1)} - a_{p+1}^{(n+1)}}{a_q^{(n+1)} - a_{q+1}^{(n+1)}}$$

ligt, zoo weinig als men verkiest van de éénheid.

Hiermede is dus het in Art. 5 uitgesprokene bewezen.

9. Voor het gemak der schrijfwijze zal ik voor een oogenblik  $a_p^{(n)}$  door  $b_p$ ,  $a_p^{(n+1)}$  door  $b_p'$  aanduiden.

Dan is dus

$$b_1' - b_k' = \frac{b_1 + b_2 \dots + b_k}{k} - \frac{k}{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \dots + \frac{1}{b_k}},$$

$$\begin{aligned} \text{of} \quad k \left( \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \dots + \frac{1}{b_k} \right) (b_1' - b_k') &= 1 + \frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_1} \dots + \frac{b_k}{b_1} + \\ &+ \frac{b_1}{b_2} + 1 + \frac{b_3}{b_2} \dots + \frac{b_k}{b_2} + \\ &+ \frac{b_1}{b_3} + \frac{b_2}{b_3} + 1 \dots + \frac{b_k}{b_3} + \\ &+ \dots \\ &+ \frac{b_1}{b_k} + \frac{b_2}{b_k} + \frac{b_3}{b_k} + \dots + 1 - k^2. \end{aligned}$$

De uitdrukking rechts is

$$= \sum \left( \frac{b_p}{b_q} + \frac{b_q}{b_p} - 2 \right) = \sum \frac{(b_p - b_q)^2}{b_p b_q},$$

waar  $p$  en  $q$  de getallen  $1, 2, \dots, k$  doorloopen, en  $p > q$  blijft.

Deelt men nu beide leden door  $(b_1 - b_k)^2$  en gaat over tot de limiet voor  $n = \infty$ , dan volgt daar volgens het voorgaande

$$\lim \frac{(b_p - b_q)^2}{(b_1 - b_k)^2} = \left( \frac{p-q}{k-1} \right)^2$$



is, en ter bekorting de limiet van  $b_1 b_2 \dots b_k$ ,  $b$  genoemd wordt,

$$\frac{k^2}{b} \lim \frac{b_1' - b_k'}{(b_1 - b_k)^2} = \frac{1}{(k-1)^2 b^2} \Sigma (p-q)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is} \quad \Sigma (p-q)^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + (k-1)^2 + \\ &\quad + 1^2 + 2^2 + \dots + (k-2)^2 + \\ &\quad + 1^2 \dots + (k-3)^2 + \\ &\quad \dots \dots \dots + 1, \end{aligned}$$

waarvoor men na herleiding verkrijgt

$$\Sigma (p-q)^2 = \frac{1}{12} k^2 (k^2 - 1),$$

$$\text{dus} \quad \lim \frac{b_1' - b_k'}{(b_1 - b_k)^2} = \frac{1}{12} \left( \frac{k+1}{k-1} \right) \times \frac{1}{b},$$

$$\lim \frac{a_1^{(n+1)} - a_k^{(n+1)}}{(a_1^{(n)} - a_k^{(n)})^2} = \frac{1}{12} \cdot \frac{k+1}{k-1} (a_1 a_2 \dots a_k)^{-\frac{1}{k}}, \quad (n = \infty), \quad (19)$$

10. Deze formule (19) geeft een duidelijk begrip van de snelheid, waarmede ten slotte de getallen tot hun gemeenschappelijke limiet  $\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}$  convergeeren, het blijkt dat  $a_1^{(n+1)} - a_k^{(n+1)}$  een eendige verhouding heeft tot de tweede macht van  $a_1^{(n)} - a_k^{(n)}$ .

In het eerste voorbeeld van Art. 4 was

$$a_1'' - a_3'' = 0.00009 \ 4628,$$

en als benaderde waarde van  $a_1'' - a_3''$  kan nu genomen worden

$$\frac{1}{6} \frac{(a_1'' - a_3'')^2}{a_2''};$$

en daar  $a_1''$ ,  $a_2''$ ,  $a_3''$  op zeer weinig na eene rekenkunstige reeks vormen, heeft men aan

$$a_1'' = 4.64158 \ 88337 \ 74$$

$$\text{de correctie} \quad - \frac{1}{12} \frac{(a_1'' - a_3'')^2}{a_2''} = -0.00000 \ 00001 \ 61$$

toe te voegen, om de in 12 decimalen nauwkeurige waarde van  $\sqrt[3]{100}$

$$4.64158 \ 88336 \ 13$$

te verkrijgen.

In het tweede voorbeeld heeft men aan

$$a_1'' = 2.21386 \ 38420 \ 8,$$

$$\text{de correctie} = -\frac{5}{72} \frac{(a_1'' - a_1')^2}{a_1''} = -0.00000 \ 00026 \ 8$$

aan te brengen, om te verkrijgen

$$\sqrt[4]{24} = 2.21336 \ 38394 \ 0.$$

11. Met een enkel woord moge nog het geval, dat eenige der getallen  $a_1, a_2, \dots, a_k$  gelijk nul zijn, besproken worden.

Onderstellen wij

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots \geq a_h > 0, \ h < k,$$

en

$$a_{h+1} = a_{h+2} = a_k = 0;$$

dan zijn blijkbaar  $M_0, M_1, M_2 \dots M_h$  positief, niet gelijk nul, en  $M_{h+1}, \dots, M_k$  allen  $= 0$ .

Derhalve worden  $a_1', a_2', \dots, a_h'$

allen positief, niet gelijk nul;  $a_{h+1}' = 0$ ; terwijl  $a_{h+2}', \dots, a_k'$  geen bepaalde beteekenis hebben. Stelt men echter vast, dat in dit geval  $a_{h+1}' \dots a_k'$  allen gelijk nul zullen zijn, dan zijn er dus van de getallen

$$a_1', a_2', \dots, a_k'$$

evenveel gelijk nul, als van de oorspronkelijke groep  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Men ziet nu onmiddellijk, dat de verdere beschouwingen van Art. 3 met hoogst geringe wijzigingen onveranderd doorgaan; en dat ook nu de getallen  $a_1^{(n)} \dots a_k^{(n)}$  tot een zelfde limiet, die gelijk aan nul is, convergeeren.

Daarentegen is de wijze, waarop deze convergentie hier plaats vindt, geheel anders, en men kan zeggen, dat deze convergentie veel langzamer is.

Het blijkt namelijk, dat de verhouding van twee opvolgende getallen

$$a_p, a_p', a_p'', a_p''', \dots, a_p^{(n)} \dots, p = 1, 2, 3 \dots k,$$

tot een eindige (gemakkelijk te bepalen) limiet convergeert, die voor de verschillende waarden van  $p$  dezelfde is; terwijl de verhoudingen der getallen van een zelfde groep

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)} \dots, a_h^{(n)}$$

tot eindige limieten convergeeren, die alleen van  $k$  en  $h$  afhangen, niet van de getallenwaarden van  $a_1, a_2, \dots, a_h$ , waarvan men is uitgegaan.

Daar het strenge bewijs van deze eigenschappen meer ruimte schijnt te vorderen, dan in eenige overeenstemming is met hun oogenblikkelijk belang, zoo vergenoeg ik mij met deze aanduidingen.

12. De toepassing op willekeurige complexe waarden levert groote moeilijkheden op.

Wel is het gemakkelijk, in dit geval voorwaarden op te stellen, die, zoo zij door  $a_1, a_2, \dots, a_k$  vervuld worden, voldoende zijn om te besluiten, dat de rekenwijze tot een bepaalde limiet voert; en dan aan te geven, welke der  $k$ -waarden van  $(a_1, a_2, \dots, a_k)^{\frac{1}{k}}$  deze limiet is; maar het schijnt uiterst bezwaarlijk, om, zoo  $a_1, a_2, \dots, a_k$  willekeurig gegeven zijn, uit te maken, of er al dan niet een limiet is, en in het eerste geval deze limiet aan te geven.

Alleen het geval  $k = 2$  levert niet het minste bezwaar op, en het zal daarom voldoende zijn, de volgende uitkomsten eenvoudig mede te deelen.

Men vindt dan, dat in dit geval er altijd eene limiet

$$= \pm \sqrt{a_1 a_2}$$

is, behalve wanneer de verhouding  $a_1 : a_2$  reël negatief is.

Stelt men

$$a_1 = r_1 e^{\alpha_1 i},$$

$$a_2 = r_2 e^{\alpha_2 i},$$

en neemt  $r_1$  en  $r_2$  positief,  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  tusschen 0 en  $2\pi$  (de eerste waarde in-, de tweede buitengesloten), dan is de limiet

$$= + \sqrt{r_1 r_2} e^{\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) i},$$

wanneer de volstreckte waarde van  $\alpha_1 - \alpha_2$  kleiner dan  $\pi$  is.

Is echter  $\alpha_1 - \alpha_2$  grooter dan  $\pi$ , dan is de limiet

$$= - \sqrt{r_1 r_2} e^{\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) i},$$

Neemt men bijv.  $a_1 = z, a_2 = \frac{1}{z}$ ,

dan is de limiet gelijk aan  $+1$  of  $-1$ ,

al naar dat het reële deel van  $z$  positief of negatief is.

Daar

$$a_1, a_1', a_2', a_3', \dots$$

hier allen rationeele functien van  $z$  zijn, zoo heeft men in

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots,$$

waarin

$$b_1 = a_1, b_2 = a_1' - a_1, b_3 = a_1'' - a_1', b_4 = a_1''' - a_1'', \dots$$

eene oneindige reeks, waarvan de termen rationeele functiën van  $z$  zijn, convergeerend voor alle waarden van  $z$ , waarvan het reële deel niet gelijk nul is, en waarvan de som gelijk aan  $+1$  of gelijk aan  $-1$  is, alnaardat het reële deel van  $z$  positief of negatief is.

Eene dergelijke reeks is door WEIERSTRASS opgesteld in de hoogst belangrijke verhandeling „zur Functionenlehre”, voorkomende in de *Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften*. 1880, Seite 735.

Kort daarop merkte TANNERY op, dat men op zeer eenvoudige wijze dergelijke reeksen kan vormen. (Zie *Monatsb. Februar* 1881, Seite 228 e. v. v.).

Men zal gemakkelijk bemerken, dat de bovenstaande reeks als bijzonder geval begrepen is onder degene, die WEIERSTRASS t. a. p. pag. 280 aangeeft. (Men verbeterde daar de drukfout; in plaats van  $x' = \frac{1+x}{1-x}$  moet gelezen worden  $x' = \frac{1-x}{1+x}$ ).

Eene vertaling van het eerste opstel van WEIERSTRASS en de latere mededeeling naar aanleiding van TANNERY's bemerking, is te vinden in het *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, deuxième série, tome V, Avril* 1881.

---

## REGISTER, NAAR DE ONDERWERPEN GERANGSCHIKT, OP EENIGE WISKUNDIGE TIJDSCHRIFTEN.

---

### ANALYTISCHE MEETKUNDE OP HET PLAT VLAK.

- BULL. MATH. T. 4, p. 318—328. Sur la théorie des connexes conjugués. Par *M. Cyparissos Stephanos*.  
 GR. ARCH. B. 67, S. 425—445. Die ersten Formeln für die Rechnung mit trimetrischen Punktcoordinaten. Von *E. Hain*.

---

### ANALYTISCHE MEETKUNDE IN DE RUIMTE.

- N. A. DE M. T. 20, p. 175—177. Question 1275. Par *R. W. Genèse*.  
 id. p. 411—413. Note sur des formules de Joachimsthal. Par *M. A. Droz*.  
 MATH. T. 1, p. 65—67. Notes de géométrie analytique. Par *M. E. Lucas*.  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 231—256. Ueber Isothermenschaaren, isogonale Verwandtschaften und conform veränderliche Systeme: die mit den Abbildungen  $z = \sqrt[n]{Z}$  und  $z = \sqrt[n]{\frac{dZ^n + b}{cZ^n + d}}$  zusammenhängen. Von *G. Holzmüller*.  
 J. v. CR. B. 91, S. 1—22. Das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Classe. Von *W. Stahl*.

---

### BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

- GR. ARCH. B. 65, S. 208—210. Zur orthogonalen Axonometrie. Von *J. Streissler*.  
 N. A. DE M. T. 20, p. 12, 13. Solution géométrique d'une question proposée en 1879 au Concours d'Agrégation pour l'enseignement secondaire spécial. Par *M. L. Lebrun*.  
 MATH. T. 1, p. 49—51. Courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un hélicoïde à plan directeur. Par *M. Verstraeten*.  
 id. p. 187—189. Courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un hélicoïde à plan directeur. Par *M. Mistor*.  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 272—296. Ueber die Grundprincipien der Linearperspective. Von *G. Hauck*.

---

### BOL.

- GR. ARCH. B. 65, S. 176—187. Excentrischer Kugelsector. Von *R. Hoppe*.  
 MATH. T. 1, p. 29. Question 13. Par *P. Ruez*.  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 50—56. Ein Ortsbestimmungsproblem der sphärischen Astronomie. Von *S. Günther*.  
 id. S. 201—294. Ueber die Bestimmung des Ortes eines Gestirnes durch den Durchschnitt zweier grösster Kugellreise. Von *E. Weiss*.  
 GR. ARCH. B. 67, S. 131—159. Berechnung der Lichtmenge, die von einem gegebenen leuchtenden Punkt auf ein gegebenes Ellipsoid fällt. Von *A. Kiel*.

## CINEMATICA.

- N. A. DE M. T. 20, p. 197—200. Sur la construction de la normale dans un certain mode de génération des courbes planes. Par M. M. d'Ooagne.  
 id. p. 456—459. Note sur le système articulé du Colonel Peaucellier. Par M. M. d'Ooagne.  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 157—178. Beiträge zur Kinematik ähnlich-veränderlichen und affin-veränderlichen Gebilde. Von A. Schumann.

## CIRKEL.

- N. A. DE M. T. 20, p. 528, 524. Question 1873. Par M. N. Gaffart.  
 GR. ARCH. B. 66, S. 17—23. Lien des centres tangents intérieurement à un demi-cercle, et extérieurement aux deux demi-cercles, qui ont pour diamètres les deux segments du diamètre du premier demi-cercle. Par G. Dostor.  
 id. S. 246—250. Ueber einen speciellen Fall des Apollonischen Tactionsproblem. Von K. E. Hoffmann.  
 id. S. 325—327. Einige Sätze aus der Kreislehre. Von W. Jerabek.  
 id. B. 67, S. 111, 112. Ein Beitrag zur Kreislehre. Von F. Schilfner.

## CONSTRUCTIE (MEETKUNDIGE).

- N. A. DE M. T. 20, p. 265, 266. Extrait d'une lettre de M. Haillecourt.  
 id. p. 266—271. Réponse de M. Barbarin.  
 GR. ARCH. B. 67, S. 44—62. Grundzüge der Geometrie des Cirkels. Von Fr. Bessell.

## DETERMINANTEN.

- SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 64—70. Ueber doppelt-orthosymmetrische Determinanten. Von K. Weihrauch.  
 id. S. 892, 898. Beweis eines Weierstrass'schen Satzes. Von H. Hovestadt.  
 J. v. CR. B. 91, S. 288—247. Ueber eine Eigenschaft der Unter-determinanten einer symmetrischen Determinante. Von J. N. Hassidakis.

## DIFFERENTIALVERGELIJNINGEN.

- SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 179—200. Zur Integration der Differentialgleichungen in der Dioptrik der continuirlich geschichteten kugelförmigen Krystalllinse der Fische. Von L. Matthiessen.  
 BULL. MATH. T. 4, p. 278—300, 328—336. Sur une classe de fonctions de plusieurs variables, provenant de l'inversion des intégrales des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients rationels. Par M. L. Fuoks.  
 id. p. 416—438. Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique, et sur une classe d'équations différentielles. Par M. E. Picard.  
 J. v. CR. B. 91, S. 79—198, 841—846. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von L. W. Thomé.  
 id. S. 199—214. Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen und deren Differentialquotienten. Von L. Königsberger.  
 id. S. 262—264. Integrale von einigen linearen Differentialgleichungen. Von Gräfe.  
 id. S. 265—300. Ueber den Zusammenhang zwischen den allgemeinen und den particulären Integralen von Differentialgleichungen. Von L. Königsberger.  
 N. A. v. W. Dl. IX.

- N. ARCH. DI. 8, blz. 23—56. Eenige toepassingen van de theorie der singuliere integralen bij differentiaalvergelijkingen van de tweede orde. Door *P. J. Hollman*.
- GR. ARCH. B. 66, S. 113—146. Ueber die von Challis vorgeschlagene neue Integrationsmethode von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und ihre Anwendung auf gewisse ungelöste Aufgaben aus der Variationsrechnung. Von *M. Ehrhorn*.
- id. S. 397—404. Bewegungen des Aethers im freien Raume, welche ein continuirliches Farbenspectrum verursachen. Von *E. Maiss*.
- id. B. 67, S. 160—164. Sur les équations fondamentales de la dynamique. Par *M. Janaud*.
- id. S. 312—323. Ueber Integrale einiger Differentialgleichungen. Von *N. Herz*.
- J. DE L. T. 7, p. 1—32. Exposé des méthodes générales en Mathématiques; résolution et intégration des équations; applications diverses, d'après Hoené Wronski; par *M. E. West*.
- id. p. 233—238. Intégration, sous forme finie, d'une quatrième espèce d'équations différentielles linéaires à coefficients variables. Par *M. D. André*.

---

ELIMINATIE.

- N. A. DE M. T. 19, p. 202—206. Sur un procédé d'élimination. Par *M. A. Biehler*.
- id. p. 332—334. Lettre de *M. A. Biehler*.
- OL. MATH. ANN. B. 16, S. 345—347. Ueber eine Eigenschaft der Resultante. Von *A. Brill*.
- N. A. DE M. T. 20, p. 546—564. Contribution à la théorie de la substitution des systèmes d'équations. Application de cette théorie à la recherche de l'équation et des points multiples d'un lieu défini par  $k$  équations, contenant  $k-1$  paramètres variables. Par *M. L. Saitel*.

---

ELLIPTISCHE FUNCTIONEN.

- SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 333—335. Ueber die Sturm'sche Methode der Ableitung des Additionstheorems der elliptischen Integrale erster Gattung. Von *Mach*.
- J. V. GR. B. 91, S. 325—340. Beitrag zur linearen Transformation der elliptischen Functionen. Von *O. Rausenberger*.
- id. S. 347, 348. Eine geometrische Darstellung der Landen'schen Substitutionen. Von *M. H. Sehellbach*.
- GR. ARCH. B. 67, S. 345—374. Einige Beziehungen zwischen den Integralen der elliptischen Functionen. Von *N. Herz*.
- OL. M. ANN. B. 18, S. 312—365. Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades. Von *J. Gierster*.
- id. S. 507—527. Versuch einer übersichtlichen Darstellung der Riemann'schen Fläche, welche der Galois'schen Resolvante der Modulargleichung für Primzahltransformation der elliptischen Functionen entspricht. Von *W. Dyck*.
- id. S. 528—592. Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe. Von *A. Hurwitz*.
-

## FONCTIONS (THEORIE DES).

- MATH. T. 1, p. 1—6. Démonstration élémentaire du théorème de Taylor pour les fonctions d'une variable imaginaire. Par *P. M.*
- id. p. 128—127. Sur une application de l'Algèbre directive.
- id. p. 127, 128. Question 6. Par *M. César.*
- id. p. 193—198. Définition du mot limite. Par *P. M.*
- SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 1—14. Die Bestimmung einer Function auf einer Kreisfläche aus gegebenen Randbedingungen. Von *H. Veltmann.*
- id. S. 357—376. Einige Anwendungen eines functionentheoretischen Satzes. Von *H. Krey.*
- J. V. CR. B. 91, S. 54—78. Sur quelques points de la théorie des fonctions. Extrait d'une lettre à M. Mittag-Leffler. Par *Ch. Hermite.*
- id. S. 301—334. Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln. Von *L. Kronecker.*
- N. ARCH. DL. 8, blz. 81—88. Eene bijzondere eigenschap der quaterniënen. Door *G. J. D. Mounier.*
- GR. ARCH. B. 66, S. 238—245. Sur des polynomes de deux variables analogues aux polynomes de Jacobi. Par *P. Appell.*
- id. S. 314—320. Zur Zerlegung einer rationalen algebraischen Function in Partialbrüche. Von *H. von Hüpfingen Bergendorf.*
- id. B. 67, S. 102—104. Note sur une classe de fonctions symétriques. Par *W. Kapteyn.*
- J. DE L. T. 7, p. 49—70. Applications mécaniques du Calcul des quaternions. Par *M. Genty.*
- CL. M. ANN. B. 18, S. 69—77. Ueber unendliche Formensysteme in der Theorie der rationalen Functionen. Von *J. König.*
- id. S. 161—194. Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function [Kegelfunction] und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung. Von *F. G. Mehler.*
- id. S. 195—236. Ueber die Mehler'schen Kegelfunctionen und deren Anwendung auf elektrostatische Probleme. Von *C. Neumann.*
- id. S. 237—240. Ueber Lamé'sche Functionen. Von *F. Klein.*
- id. S. 379—409. Theorie der allgemeinen Periodicität. Von *O. Rausenberger.*
- id. S. 443—447. Ueber die algebraischen Functionen, welche zu gegebenen Riemann'schen Flächen gehören. Von *J. Thomas.*

## GEODESIE.

- GR. ARCH. B. 58, S. 377—379. Einrichtung des Messtisches auf drei Punkte. Von *L. Gr. von Pfeil.*
- SCHL. ZEITSCHR. B. 26. Hist. lit. Abth. S. 81—98. Recension von „Die Grundlagen der trigonometrischen Vermessung im rechtwinkligen Koordinatensystem von S. H. Krantz. 1879.“ Von *Rohn.*
- N. ARCH. DL. 8, blz. 113—223. Studiën over kaartprojectiën. Antwoord op prijsvraag N°. 3. 1880. Door *Ch. M. Schols.*

## GEOMETRIA SITUS.

- N. CORR. M. T. 5, p. 169. Un problème traité par Euler. Par *E. C.*
- id. T. 6, p. 317—320. Extrait d'une lettre de M. P. S.



- N. A. DE M. T. 20, p. 473—480. Question 251. Par M. J. Bourget.  
 MATH. T. 1, p. 121. Carré magique de la Villa Albani. Par M. C.  
 GR. ARCH. B. 66, S. 286—318. Ueber magische Quadrate und ähnliche Zahlenfiguren. Von H. Hasemuth.  
 id. S. 413—447. Ueber magische Rechtecke mit ungeraden Seitenzahlen. Von H. Hasemuth.  
 id. B. 67, S. 238—253. Ueber magische Parallelepiped. Von H. Hasemuth.

---

GESCHIEDENIS.

- N. A. DE M. T. 20, p. 137—139. Necrologie de M. G. Bellavitis.  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 20, Hist. Liter. Abth. S. 1—19. Euler's Theorie von der Ursache der Gravitation. Von C. Zunkrahe.  
 id. S. 19—25. Der Briefwechsel zwischen Gauss und Sophie Germain. Von S. Günther.  
 id. S. 33—37. Die Methode Tájàn im Suám-king von Sum-tiè, und ihre Verallgemeinerung durch Yih-king im I Abschnitte der Tá-jàm-li-schü. Von L. Matthiessen.  
 id. S. 38, 39. Miscelle. Von F. Hultsch.  
 id. S. 153—169. Justus Bellavitis. Eine Skizze seines Leben's und wissenschaftlichen Wirkens. Von A. Favaro.  
 BULL. MATH. T. 4, 1, p. 27—30. Extrait du Manuscrit N°. 24237, du fonds français de la bibliothèque nationale. Par M. A. Marre.  
 id. p. 200—207. Deux nouvelles lettres mathématiques inédites du P. Jaquemet de l'Oratoire, de la Maison de Vienne (Dauphiné). Par M. A. Marre.  
 id. p. 268—272. Lettre de M. C. Henry.  
 id. p. 317, 318. Lettre de M. Ph. Gilbert.  
 id. p. 343—348. Giusto Bellavitis. Par A. Laisant.  
 id. p. 433—442. Discours prononcés aux funérailles de M. Chasles. Par M. J. Bertrand, Bouquet.  
 GR. ARCH. B. 67, S. 113—130. Geschichtliche Entwicklung der mathematischen Elektrizitätslehre und Bedeutung des Potentials für die letztere. Von A. Kiel.  
 J. DE L. T. 7, p. 201—214. Remarques sur les Mémoires relatifs à la théorie de la lumière, renfermés dans les Exercices d'Analyse et de Physique mathématique de Cauchy. Par M. E. Mathieu.  
 OL. MATH. ANN. B. 18, S. 255—279. B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Von O. Stolz.

---

GETALLENLEER.

- N. A. DE M. T. 20, p. 140—142. Extrait d'une lettre de M. D. Marchand.  
 id. p. 177, 178. Question 1813. Par M. S. Réalis.  
 id. p. 213—215. Sur un procédé particulier de division rapide. Par M. C. Henry.  
 id. p. 330—332. Question 1195. Par M. Moret-Blanc.  
 id. p. 335, 336. Question 1330. Par M. S. Réalis.  
 id. p. 375, 376. Question 1350. Par M. Moret-Blanc.  
 id. p. 413—420. Décomposition des nombres  $f^{12} - 9g^{12}$  et du double de ces nombres en deux cubes rationnels. Par M. C. Henry.  
 id. p. 431, 432. Question 1349. Par M. Moret-Blanc.

- MATH. T. 1, p. 78—76. Question 25. Par *S. Réalis*.  
 id. p. 99—102. Démonstration élémentaire et généralisation de quelques théorèmes de M. Berger. Par *E. Césaré*.  
 id. p. 108—106. Théorie des fractions périodiques. Par *P. M.*  
 id. p. 161—168. Question 22. Par *A. F. Puelich*.  
 id. p. 176, 177. Sur une somme de cubes. Par *M. S. Réalis*.  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 184, 185. Das Reciprocitätsgesetz. Von *J. Thomas*.  
 BULL. MATH. T. 4, p. 77—88. Théorèmes de Staudt et Clausen. Par *M. E. Catalan*.  
 id. p. 182—192. Sur la loi de réciprocité. Par *M. Kronecker*.  
 J. V. CR. B. 91, S. 254—261. Ueber das sogenannte Restproblem in den chinesischen Werken Swan-king von Suitsze und Tayen lei schu von Yih-king. Von *L. Matthiessen*.  
 GR. ARCH. B. 66, S. 327—329. Zum Beweise des Satzes, dass jede Primzahl  $p = 4n + 1$  Summe zweier Quadrate ist. Von *R. Hoppe*.  
 id. S. 353—357. Einige Eigenschaften der Zahlen, welche zum Product der ersten  $n$  Primzahlen prim und kleiner als dieselbe sind. Von *Fr. Woller*.  
 id. B. 67, S. 215—219. Ueber die Darstellbarkeit von Primzahlen durch die Form  $a^2 + b^2$ . Von *Th. Hasemuth*.
- 

## HOMOGENE FUNCTIEN.

- N. A. DE M. T. 20, p. 38—48. Reduction de deux polynomes homogènes du second degré à des sommes de carrés. Par *M. H. Laurent*.  
 J. V. CR. B. 91, S. 221—237. Ueber die Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten. Von *S. Gundelfinger*.  
 CL. MATH. ANN. B. 18, S. 98, 94. Notiz über ternäre Formen mit verschwindender Functionaldeterminante. Von *M. Pasch*.  
 id. S. 280—288. Trois Notes sur la théorie des formes. Par *M. Faa de Bruno*.
- 

## INTEGRAALREKENING.

- N. A. DE M. T. 20, p. 529—537. Sur la détermination de quelques intégrales indéfinies. Par *M. H. Resal*.  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 78—97. Ueber die Variationen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung. Von *G. Erdmann*.  
 BULL. MATH. T. 4, p. 207—209. Mémoire de L. Euler, publié conformément au manuscrit autographe. Par *M. H. Henry*.  
 id. p. 209—256. Considérations sur quelques formules intégrales dont les valeurs peuvent être exprimées en certains cas par la quadrature du cercle. Par *L. Euler*.  
 J. V. CR. B. 91, S. 215—220. Ueber mehrfache Integrale, welche durch eine Transformation der Variabeln ihre Gestalt nicht ändern. Von *S. Gundelfinger*.  
 GR. ARCH. B. 66, S. 72—98. Ueber eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Methode der mechanischen Quadratur. Von *F. August*.  
 id. B. 67, S. 418—424. Zwei reciproke Relationen einer Integralfunction nebst Anwendung. Von *R. Hoppe*.
-

## INTEGRALEN (BEPAAALDE).

- MATH. T. 1, p. 67—70. Sur une intégrale définie. Par M. P. M.  
 GR. ARCH. B. 66, S. 225—237. Beitrag zu einer Classe von bestimmten Integralen complexer Functionen. Von Niemöller.  
 CL. M. ANN. B. 28, S. 593—603. Ueber Darstellungsfunktionen. Von P. du Bois-Reymond.

## KEGELSNEDEN.

- N. A. DE M. T. 20, p. 14—17. Solution d'une question proposée en 1876 au concours entre les classes de mathématiques spéciales de l'Académie de Donai. Par M. A. Hilaire.  
 id. p. 65—78. Solution de la question proposée en 1879, pour le concours d'admission à l'Ecole Polytechnique. Par M. Moret-Blanc.  
 id. p. 78—94, 110—112. Théorèmes sur les normales à l'ellipse. Par M. Witt.  
 id. p. 127—131. Solution de la question proposée pour le concours d'admission à l'Ecole Polytechnique en 1880. Par M. H. Les.  
 id. p. 133, 134. Normale menée à une conique à centre d'un point de l'axe focal. Par M. E. Lebon.  
 id. p. 179. Question 1844. Par M. H. Laudiero.  
 id. p. 180—182. Question 1848. Par M. J. Boudènes.  
 id. p. 235—238. Concours d'admission à l'Ecole centrale (1<sup>re</sup> Session 1879). Par M. J. Boudènes.  
 id. p. 273—275. Lettre de M. Gambey.  
 id. p. 289—304. Sur les propriétés principales des foyers des courbes du second degré et sur la détermination analytique de ces points. Par M. A. Letnikow.  
 id. p. 321—325. Lettre de M. L. Donoet.  
 id. p. 372, 373. Question 1831. Par M. Moret-Blanc.  
 id. p. 379, 380. Question 1858. Par M. H. du Montel.  
 id. p. 427, 428. Question 1845. Par M. N. Goffart.  
 id. p. 459—464. Solutions de quelques questions posées aux examens d'admission à l'Ecole Polytechnique. Par M. A. Gencia-Martin.  
 id. p. 464—468. Concours d'admission à l'Ecole centrale en 1880 (2<sup>me</sup> Session). Par M. A. Chambeau.  
 MATH. T. 1, p. 53—57. Sur un lieu géométrique. Par P. Ruez.  
 id. p. 59, 60. Question 11. Par V. Jamet.  
 id. p. 85—87. Puissance d'un point par rapport à une conique à centre. Par M. Barbarin.  
 id. p. 113—115. Question 28. Par M. Brocard.  
 id. p. 122, 123. Ecole Polytechnique. Concours de 1881. Par H. Brocard.  
 id. p. 129—131. Question 36. Par E. Lemoine.  
 id. p. 179, 180. Question 62. Par V. Jamet.  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 59—62. Ueber Summen und Producten von Vektoren der Ellipsen und verwandter Curven. Von Schlämilch.  
 id. S. 135, 136. Eine Eigenschaft concentrischer Ellipsen und Hyperbeln. Von Schlämilch.  
 id. S. 387—391. Ueber die Normalen der Ellipse. Von H. Lauermann.  
 J. V. CR. B. 91, S. 243—253. Ueber ein Kriterium von Steiner in der Theorie der Kegelschnitte. Von E. Hanyady.

- GR. ARCH. B. 66, S. 1—16. Zur Construction der Schnittpunkte von Geraden mit Kegelschnitten. Von *C. Pels*.  
 id. S. 274—279. Zur Polaritätstheorie der Kegelschnitte. Von *E. Hain*.  
 id. B. 67, S. 104—106. Ueber einige Eigenschaften der Kegelschnitte. Von *J. Bleschke*.  
 id. S. 219—221. Ueber den Schnitt zweier Kegel zweiter Ordnung nach Curven zweiter Ordnung. Von *J. Diehl*.  
 id. S. 332, 333. Ueber dreifach berührende Kegelschnitte mit vorgegebenem Brennpunkte. Von *F. Hofmann*.

#### KETTINGBREUK.

- GR. ARCH. B. 66, S. 33—45. Ueber die Auflösung der trinomischen Gleichungen durch kettenbruch-ähnliche Algorithmen. Von *K. E. Hofmann*.  
 id. B. 67, S. 337—342. Die Entwicklung des Euler'schen Algorithmus. Von *L. Kluys*.

#### KRÖMME LÏNEN (THEORIE).

- N. A. DE M. T. 20, p. 11, 12. Construction de la parabole osculatrice en un point d'une courbe. Par *M. G. Königs*.  
 id. p. 35—38. Solution d'une question de licence (Fac. de Paris, 1875). Par *M. E. Fauquembergue*.  
 id. p. 97—110, 489—498, 537—546. Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques. Par *M. Ch. Biehler*.  
 id. p. 131, 132. Sur l'équation de Hesse aux points d'inflexion. Par *M. Crotin*.  
 id. p. 171—173. Sur une question de licence. Par *M. E. Fauquembergue*.  
 id. p. 184, 185. Question 1856. Par MM. *E. Peoquery* et *E. Chretien*.  
 id. p. 401, 402. Question. Par *M. E. Dewulf*.  
 id. p. 406—408. Note sur un système de courbes orthogonales et homofocales. Par *M. A. Legoux*.  
 id. p. 423—430. Question 1847. Par *M. N. Goffart*.  
 id. p. 444—453. Sur le nombre de points multiples d'une courbe algébrique et les courbes unicursales. Par *M. E. Pellet*.  
 id. p. 498—500. Théorèmes sur les courbes algébriques. Par *M. Weill*.  
 MATH. T. 1, p. 7. Généralisation d'une propriété des podaires. Par *P. M.*  
 id. p. 17—22, 33—36. Sur l'évaluation approchée des aires planes. Par *P. M.*  
 id. Supplém. p. 1—34. Sur l'évaluation approchée des aires planes. Par *P. Mansion*.  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 257—263. Doppelte Entstehungsweise der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven. Von *Chr. Wiener*.  
 id. S. 391, 392. Note über Discontinuitäten bei Curven. Von *P. Vogel*.  
 GR. ARCH. B. 66, S. 46—55. Ueber Parallelen geschlossener Curven. Von *E. Hoppe*.  
 id. S. 364—372. Zur allgemeinen Theorie der ebenen Curven. Von *E. Mehler*.  
 id. S. 386—396. Das Aoust'sche Problem in der Curventheorie. Von *E. Hoppe*.  
 id. B. 67, S. 203—207. Zur Theorie der asymptotischen Punkte. Von *F. Schiffer*.  
 J. DE L. T. 7, p. 109, 110. Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite. Par *M. H. Résal*.  
 id. p. 375—422. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. Par *M. H. Poincaré*.

CL. MATH. ANN. B. 18, S. 91, 92. Notiz über die rationalen Curven. Von *M. Pasch*.

id. S. 448. Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Characteren einer Curve im Raume von  $n$  Dimensionen stattfinden. Von *G. Veronese*.

#### KROMME LIJNEN (BIJZONDERE).

N. A. DE M. T. 20, p. 160—171. Note sur la cardioïde et le limaçon de Pascal.

Par *M. M. Weill*.

id. p. 250—252. Note sur une enveloppe. Par *M. F. W. Baehr*.

id. p. 368—372. Question 1306. Par *M. Genty*.

id. p. 408—408. Note sur la question 898. Par *M. E. Catalan*.

id. p. 416—418. Question de Licence. (Paris, Juillet 1880). Par *M. E. Fauquembergue*.

id. p. 458—456. Solution d'une question proposée par *M. Catalan*. Par *M. P. Barbarin*.

id. p. 518—520. Question 1283. Par *M. Moret-Blanc*.

id. p. 520—522. Question 1843. Par *M. Moret-Blanc*.

MATH. T. 1, p. 28. Question 12. Par *E. Clevers*.

id. p. 48—47. Question 2. Par *E. Clevers*.

id. p. 71, 72. Question 12. Par *H. Brocard*.

id. p. 81—84. Note sur la Logocyclique ou Strophoïde. Par *S. G.*

id. p. 97—99. Exercice de géométrie infinitésimale. Par *M. Th. Gilbert*.

id. p. 128, 129. Question 35. Par *P. M.*

id. p. 145—148. Question 15. Par *F. Pisani*.

SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 143, 144. Eigenschaften der Lemniscate. Von *W. Hess*.

GE. ARCH. B. 66, S. 334—336. Ueber die Tangenten der hyperbolischen Spirale. Von *Fr. Schiffner*.

id. S. 337—352. Erweiterung des Satzes von der Sichel des Archimedes und sein Zusammenhang mit dem Satze von den Mondchen des Hippocrates;

Schwerpunkte der Flächen. Von *F. W. Fischer*.

#### KROMME LIJNEN VAN DUBBELE KROMMING.

N. A. DE M. T. 20, p. 53—55. Sur la détermination du cercle osculateur d'une courbe à double courbure. Par *M. E. Hunyady*.

id. p. 348—350. Question de Licence. Par *M. E. Fauquembergue*.

id. p. 433, 434. Sur un théorème de Pappus. Par *M. H. Resal*.

SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 98—108. Notiz zu einem Satze von Chasles. Von *E. Lange*.

id. S. 270—272. Bemerkung zu der Notiz zu einem Satze von Chasles von *E. Lange*. Von *H. Schröter*.

GE. ARCH. B. 66, S. 56—71. Bestimmung und Untersuchung der Curve, welche die Punkte verbindet, die auf concentrischen, reflectirenden Schalen liegen und der Bedingung genügen, dass die von einem festen Punkte ausgehenden Lichtstrahlen daselbst so reflectirt werden, dass sie alsdann durch einen zweiten festen Punkt gehen. Von *W. Werner*.

- id. B. 67, S. 207—214. Ueber eine Raumcurve mit einem asymptotischen Punkte und deren Tangentenfläche. Von *F. Schiffner*.
- CL. M. ANN. B. 18, S. 95—98. Ueber algebraische Raumcurven, welche die Gestalt einer Schlinge haben. Von *A. Brill*.

## MECHANICA.

- N. A. DE M. T. 20, p. 201. Remarque sur le centre de composition d'un système de forces quelconques dans le plan. Par *M. M. d'Ocagne*.
- id. p. 216—220. Condition d'équilibre d'une masse fluide homogène ayant la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux et animée d'un mouvement uniforme de rotation autour de l'un de ces axes. Par *M. A. Picart*.
- id. p. 231—235. Problème de Mécanique. Par *M. E. Fauquembergue*.
- id. p. 281. Question 1308. Par *M. Moret-Blanc*.
- id. p. 337, 338. Note sur la généralisation d'un théorème de Pappus. Par *M. H. Résal*.
- id. p. 420, 421. Question de Licence (Paris, Juillet 1880). Par *M. E. Fauquembergue*.
- id. p. 506—511. Sur le mouvement vertical d'un point pesant dans un milieu résistant. Par *M. M. d'Ocagne*.
- SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 104—126. Neue Lösung eines Rotationsproblems. Von *C. Frenzel*.
- BULL. MATH. T. 4, p. 126—160. Etude géométrique sur les percussions et le choc des corps. Par *M. E. Darboux*.
- N. ARCH. DI. 8, blz. 1—22. Over de beweging van stelsels, gebonden aan voorwaarden, die afhangen van den tijd. Door *P. van Geer*.
- id. blz. 57—74. Over bewegingen van vloeistoffen onder den invloed der wrijving. Door *E. J. Michaëlis*.
- GR. ARCH. B. 66, S. 147—212. Theorie der elastischen Schwingungen. Von *H. Tendinger*.
- id. S. 213—219. Wälzung eines cylindrisch begrenzten Körpers auf Horizontalebene. Von *R. Hoppe*.
- id. S. 260—273. Ueber das Rollen eines seiner Schwere überlassenen Körpers auf horizontaler Ebene. Von *R. Hoppe*.
- id. S. 373—385. Wälzung eines von einer Tangentenfläche begrenzten Körpers auf Horizontalebene. Von *R. Hoppe*.
- id. B. 67, S. 110, 111. Eine Billard-Aufgabe. Von *E. Hain*.
- id. S. 165—176. Bewegung und Stabilität eines laufenden Rades. Von *R. Hoppe*.
- J. DE L. T. 7, p. 33—48. Sur quelques théorèmes de Mécanique. Par *M. H. Résal*.
- id. p. 129—146. Recherches sur l'Electrodynamique. Par *M. H. Résal*.
- id. p. 215—218. Détermination des trois axes d'un corps, sur lesquels les forces centrifuges exercent, pendant la rotation, une action maximum. Par *M. E. Brassinne*.
- id. p. 239—276. Sur quelques questions concernant les forces centrales. Par *M. E. Combescur*.
- id. p. 289—340. De la propagation verticale des ondes dans les liquides. Par *M. P. A. Corraglia*.

## MEETKUNDE (VLAKEE).

- N. A. DE M. T. 20, p. 182—184. Question 1853. Par M. J. B. de Lacourcelle.  
 id. p. 282—288. Question 1857. Par M. A. Aignon.  
 id. p. 307—310. Concours général de 1879. Rhétorique. Par M. A. Leinchnigel.  
 id. p. 310—314. Concours général de 1879. Seconde. Par M. H. Lez.  
 id. p. 317—319. Concours général de 1880. Seconde. Par N. N.  
 id. p. 319—321. Concours général de 1880. Troisième. Par M. Moret-Blanc.  
 id. p. 428, 424. Lettre de M. L. Lévy.
- MATH. T. 1, p. 7—10, 26, 27. Questions de mathématiques élémentaires. Par J. N.  
 id. p. 47. Question 5. Par E. Verhulst.  
 id. p. 61. Question 21. Par S. Günther.  
 id. p. 72, 73. Question 23. Par E. van Aubel.  
 id. p. 78. Question 30. Par E. van Aubel.  
 id. p. 90, 91. Question 4. Par M. H. van Aubel.  
 id. p. 93. Question 10. Par M. H. van Aubel.  
 id. p. 93. Question 14. Par M. H. van Aubel.  
 id. p. 106—108. Sur les figures semblables. Par J. N.  
 id. p. 109, 110. Partage des polygones. Par M. d'Ocagne.  
 id. p. 116, 117. Question 31. Par van Glabbeke.  
 id. p. 117, 118. Question 40. Par E. van Aubel.  
 id. p. 131—133. Question 49. Par J. N.  
 id. p. 143—151. Question 20. Par H. Brocard.  
 id. p. 153, 154, 173—176, 185—190. Sur le centre des médianes antiparallèles. Par J. Neuberg.  
 id. p. 163—165. Question 41. Par E. van Aubel.  
 id. p. 166, 167. Question 55. Par P. Interdonato.  
 id. p. 167. Question 56. Par P. Interdonato.  
 id. p. 179. Question 51. Par M. Pisani.  
 id. p. 191—193. Sur un hexagone équilatéral inscrit à un triangle donné. Par J. N.  
 id. p. 200—202. Question 50. Par J. N.  
 id. p. 202, 203. Question 69. Par J. N.
- SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 70, 71. Aufgabe. Von G. Schaertlin.  
 id. S. 133, 134. Ein Satz von ebenem Viereck. Von E. Wehrauch.  
 id. S. 208. Ueber die Verwandlung des Rechtecks in ein Quadrat. Von P. Schönmann.
- GE. ARCH. B. 66, S. 24—26. Distances des trois sommets d'un triangle au centre du cercle, qui passe par les pieds des trois hauteurs du triangle. Par G. Dostor.  
 id. S. 27—32. Les trois quadrilatères convexes d'Albert Girard, qui ont mêmes côtés, même surface et sont inscriptibles dans le même cercle. Par G. Dostor.  
 id. B. 67, p. 191—202. Ein Beitrag zur Theorie der merkwürdigen Punkte im Dreieck. Fortsetzung. Von J. Lange.  
 id. S. 335, 336. Dreiecksätze. Von E. Jachwitz.

## MEETKUNDE IN DE RUIMTE.

- GE. ARCH. B. 65, S. 204—207. Détermination algébrique très simple du centre de gravité du trapèze et du centre de gravité du tronc de pyramide à base quelconque. Par M.

- N. A. DE M. T. 19, p. 513—517. Questions proposées au concours d'admission à l'Ecole Spéciale Militaire (1879). Par M. A. Leinckugel.  
 id. p. 529—551. Sur l'évaluation de certains volumes. Par M. L. Maleyz.  
 id. T. 20, p. 814, 815. Concours général de 1880. Philosophie. Par M. Moret-Blanc.  
 id. p. 815, 816. Concours général de 1880. Rhétorique. Par M. Moret-Blanc.  
 GR. ARCH. B. 66, S. 405—412. Construction der Cardinal-Punkte eines Linsensystems. Von M. Koppe.  
 id. S. 448. Ueber den Winkel von  $n$  Dimensionen. Von R. Hoppe.  
 id. B. 67, S. 29—48. Regelmässige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen. Von R. Hoppe.  
 id. S. 269—290. Berechnung einiger vierdehnigen Winkel. Von R. Hoppe.

#### ONTWIKKELING VAN FUNCTIEN.

- N. A. DE M. T. 20, p. 253—265. Questions nouvelles d'arithmétique supérieure proposées par M. E. Lucas. Par M. Moret-Blanc.  
 id. p. 481—489. Sur la fonction génératrice des polynômes  $R_{n,1}$  de Didon. Par M. E. A. Orlov.  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 127—133. Eine Polynomentwicklung. Von H. Weikrauch.  
 BULL. MATH. T. 4, p. 43—64. 83—112. Essai historique sur la représentation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une série trigonométrique. Par M. A. Sachse.  
 J. DE L. T. 7, p. 185—200. Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle. Par M. H. Léauté.  
 id. p. 277—282. Sur le développement des fonctions implicites en une série. Par M. F. Gomes Teixeira.

#### OPPERVLAKKEN (THEORIE).

- N. A. DE M. T. 20, p. 55—57. Solution d'une question de licence (Fac. de Lille. 1878). Par M. E. Fauquembergue.  
 id. p. 113—120. Surfaces applicables sur des surfaces de révolution. Par M. A. Picart.  
 id. p. 229—231. Solution d'une question de licence. Par M. Evensque.  
 id. p. 471—478. Question de Licence (Paris. Juillet. 1880). Par M. E. Fauquembergue.  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 15—49. Die Krümmung windschiefer Flächen in den Punkten einer geradlinigen Erzeugenden. Von F. Buha.  
 id. S. 57—59. Das Verhältniss der Hauptkrümmungsradien an einem Flächenpunkte, gemessen durch den Winkel der zugehörigen Inflectionstangenten. Von Prof. Dietrich.  
 id. S. 204—207. Ueber confocale Flächen. Von O. Böklen.  
 id. S. 264—269. Ueber geodätische Linien. Von O. Böklen.  
 BULL. M. T. 4, p. 300—304. Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation. Par M. S. Lie.  
 id. p. 348—364. Sur le contact des courbes et des surfaces. Par M. G. Darboux.



- BULL. M. T. 4, p. 418—415. Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. Par M. *Lecornu*.
- J. V. CR. B. 91, S. 28—54. Ueber diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören kürzeste Linien zu sein. Von *H. v. Mangoldt*.
- GR. ARCH. B. 67, S. 96, 97. Ueber allgemeine Flächentheorie. Von *E. Mehler*. id. S. 254—264. Sur quelques corps engendrés par la révolution. Par *G. Dostor*.
- J. DE L. T. 7, p. 71—108. Sur les surfaces osculatrices. Par M. *P. Pepin*.
- OL. M. ANN. B. 18, S. 82—90. Ueber einen besonderen Fall des eindeutigen Entsprechens der Punkte zweier Flächen. Von *H. Krey*. id. S. 366—378. Ueber die Abhängigkeit der Charaktere einer durch Leitcurven bestimmten Begelfläche von den Charakteren dieser Leitcurven. Von *O. Rupp*. id. S. 604—608. Ueber eine charakteristische Eigenschaft der developpabeln Flächen. Von *H. von Mangoldt*.

#### OPPERVLAKKEN VAN DEN TWEEDEN GRAAD.

- N. A. DE M. T. 20, p. 9—11. Sur la déformation du cache-pot. Par M. *E. Lucas*. id. p. 17—20. Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours général de 1878. Par M. *C. Michaux*. id. p. 20—27. Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours général de 1879. Par M. *J. Griess*. id. p. 27—35. Solution de la question proposée en 1879, pour l'admission à l'Ecole normale supérieure. Par M. *J. Griess*. id. p. 57—65. Solution d'une question d'analyse proposée au concours d'agrégation de 1879. Par M. *P. Barbarin*. id. p. 120—127. Solution de la question proposée au concours d'admission à l'Ecole normale en 1880. Par M. *J. Griess*. id. p. 145—149. Nouvelle méthode d'intégration de l'équation différentielle des lignes de courbure de l'ellipsoïde. Par M. *A. Picart*. id. p. 178. Question 1842. Par M. *A. Leinshugel*. id. p. 305—307. Note de Géométrie. Par M. *A. Droz*. id. p. 326, 327. Lettre de M. *A. Legoux*. id. p. 333—335. Question 1828. Par M. *Moret-Blanc*. id. p. 414—416. Note sur les conditions qui expriment qu'une surface du second degré est de révolution. Par M. *Genty*. id. p. 524—526. Question 1874. Par M. *N. Goffart*.
- MATH. T. 1, p. 182, 183. Question 64. Par *J. Mister*.
- SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 136—143. Das gleichseitige Hyperboloid. Von *A. Schumann*. id. S. 383—387. Die Brennpunkte der Krümmungslinien des Ellipsoids. Von *O. Böhlen*. id. Hist. Litt. Abth. S. 192—211. Recension von „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung u. z. w. von H. Schröter. Von *Milinowski*.
- OL. M. ANN. B. 18, S. 33—68. Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. Par *H. G. Zeuthen*. id. S. 410—427. Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind. Von *F. Klein*.

- CL. M. ANN. B. 18, S. 428—442. Ueber das Parallelexagon auf dem geradlinigen Hyperboloid. Von *H. Schröter*.

#### OPPERVLAKKEN (RIJZONDERE).

- N. A. DE M. T. 20, p. 276—279. Note relative à la question 1210. Par *M. V. Hioux*.  
 id. p. 344—348, 385—391, 434—448. Sur une classe de surfaces du quatrième ordre. Par *M. V. Jamet*.  
 MATH. T. 1, p. 180, 181. Question 63. Par *P. M.*  
 GE. ARCH. B. 66, S. 321—325. Eine Tangentenconstruction zur Astroide. Von *A. Sucharda*.  
 id. B. 67, S. 222—224. Tangentenconstruction der Astroide. Von *Stammer*.  
 id. S. 380, 381. Ueber einen geometrischen Ort. Von *L. Kling*.  
 id. S. 447, 448. Zur Tangentenconstruction der Astroide. Von *Stoll*.  
 CL. M. ANN. B. 17, S. 99—159. Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche. Von *K. Rehn*.  
 id. S. 160. Bemerkung über Flächen vierter Ordnung. Von *F. Klein*.

#### POTENTIAL.

- SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 145—156, 209—280. Die Discontinuitäten des zweiten Differentialquotienten des Oberflächenpotentials. Von *Th. Horn*.  
 GE. ARCH. B. 66, S. 107—112, 228, 229. Ueber die Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze. Von *R. Hoppe*.  
 id. B. 67, S. 118—180. Geschichtliche Entwicklung der mathematischen Elektrizitätslehre und Bedeutung des Potentials für die letztere. Von *A. Kiel*.  
 J. DE L. T. 7, p. 341—374. Recherches sur la Théorie mathématique de la capillarité. Par *M. H. Résal*.  
 CL. M. ANN. B. 18, S. 469—506. Zur Theorie der Vertheilung der Elektrizität in leitenden Körpern. Von *F. E. Mehler*.

#### REEKSEN.

- MATH. T. 1, p. 37. Sur la série  $\dots + \frac{1}{(ix)^2} + \dots$  Par *M. Hermite*.  
 id. p. 51—53, 143, 144. Sur la série harmonique. Par *E. Cesaro*.  
 id. p. 58. Notes mathématiques. Par *M. E. Catalan*.  
 id. p. 74—77. Question 27. Par *M. F. Fouquet*.  
 id. p. 139—142. Sur la sommation de certaines séries. Par *P. M.*  
 id. p. 169—172. Sur la série harmonique et la formule de Stirling. Par *P. M.*  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 26, S. 63, 64. Ueber simultan convergirende und divergirende Reihen. Von *O. Schlömilch*.  
 id. S. 314—332. Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe. Von *J. Thomas*.  
 GE. ARCH. B. 67, S. 68—95. Beiträge zur Theorie der Convergenz unendlicher Reihen. Von *G. Kohn*.  
 id. S. 317—330. Ueber neuere Formen von höheren Reihen. Von *F. C. Lukas*.

- J. DE N. T. 7, p. 111—128. Digression sur les séries. Par M. E. West.  
 id. p. 147—160. Coup d'oeil sur la théorie des séries trigonométriques les plus usuelles, et sur une raison naturelle de leur convergence, applicable aux autres développements de fonctions arbitraires employés en Physique mathématique. Par M. J. Roussineq.
- 

## STELKUNDE.

- N. A. DE M. T. 20, p. 189, 140. Lettre de G. Parmentier.  
 id. p. 241—250. Note sur les limites et les nombres incommensurables. Par M. E. Jablonchik.  
 MATH. T. 1, p. 94. Question 19. Par A. van Glabbeke.  
 SCHD. ZEITSCHR. B. 26. Hist. Liter. Abth. S. 120—126. Bemerkungen zu den Archimedischen Näherungswerthen der irrationalen Quadratwurzeln. Von Heileman.  
 GR. ARCH. B. 67, S. 265—268. Relation entre certaines sommes de carrés. Par G. Dostor.  
 id. S. 291—311. Ueber das Kubiren und Kubikwurzelansziehen nach Horner's Methode. Von M. Rusch.
- 

## STERFTETAPELS EN LEVENSVZERZEKERING.

- SCHL. ZEITSCHR. B. 25, S. 11—24. Zur mathematischen Statistik. Von W. Küttner.  
 id. B. 26, S. 297—318. Zur mathematischen Statistik. Von W. Küttner.
- 

## SYNTHETISCHE MEETKUNDE.

- N. A. DE M. T. 20, p. 391—401. Exercices de Géométrie. Par M. E. Dewulf.  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 26. Hist. Liter. Abth. S. 43—58. Recension von „Die Geometrie der Lage von H. Reye, 1880.“ Von Milinowski.  
 id. S. 59—71. Recension von „Kalkul der abzählenden Geometrie von H. Schubert, 1879.“ Von R. Sturm.  
 J. V. CR. B. 91, S. 849—851. Beweis eines Satzes über projective Punktreihen. Von Pasch.  
 GR. ARCH. B. 66, S. 220—224. Ein Beitrag zur Theorie der merkwürdigen Punkte im Dreieck. Von J. Lange.  
 id. S. 280, 281. Ueber das Transversalensystem zweier Punkte. Von E. Hain.  
 id. S. 282—285. Ueber eine Verwandtschaft ersten Grades. Von E. Hain.  
 id. S. 353—364. Ueber gewisse Systeme von Kegelschnitten, die mit einander projectivisch sind und deren Erzeugnisse. Von E. Möller.  
 id. B. 67, S. 106—109. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf den Umkreis eines Dreiecks. Von E. Hain.  
 id. S. 177—190. Kegelschnittbüschel-Constructions. Von F. Bergmann.  
 CL. M. ANN. B. 18, S. 1—32. Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen. Von Fr. Schur.  
 id. S. 252—254. Ueber den Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie. Von Fr. Schur.

- GL. M. ANN. B. 18., S. 289—318. Vollständige Durchführung einer isogonalen Verwandtschaft, die durch eine gebrochene Function zweiten Grades repräsentirt wird. Von G. Holzmüller.

#### VEELHOEKEN.

- GR. ARCH. B. 66, S. 380. Zu dem Aufsatze T. 65, S. 218 über den Schwerpunkt des Vierecks. Von R. Hoppe.  
 id. S. 381, 382. Anzahl der innern Diagonalschnitte eines Vierecks. Von L. Saalschütz.  
 id. B. 67, S. 225—237. Der Beweis des Ptolemäischen Satzes. Von Schell.  
 id. S. 324—326. Ueber das vollständige Viereck. Von E. Mahler.  
 id. S. 383—385. Uebungsaufgabe für Schüler. Von Schell.

#### VEERVLAKKIGE LICHAMEN.

- N. A. DE M. T. 20, p. 271—278. Lettre de M. F. Jamet.  
 id. p. 338—344. Sur l'expression du volume de certains tétraèdres. Par M. H. Faure.  
 id. p. 515—518. Question 1272. Par N. N.

#### VERGELIJKINGEN MET EENE ONBEKENDE.

- N. A. DE M. T. 20, p. 49—53. Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation. Par M. G. Candèze.  
 id. p. 132, 133. Sur le théorème de Rolle. Par M. J. Collin.  
 id. p. 193—196. Remarques sur le théorème de Sturm. Par M. Candèze.  
 id. p. 220—224. Résolution de l'équation du troisième degré. Par M. A. Scholtz.  
 id. p. 225—227. Résolution de l'équation du quatrième degré. Par M. F. Briot.  
 id. p. 329, 330. Question 127. Par Ch. B.  
 id. p. 376—378. Question 1357. Par M. E. Peocquery.  
 id. p. 403—411. Démonstration de propositions énoncées. Par M. S. Réaume.  
 MATH. T. 1, p. 88, 89. Discussion de l'équation du 8<sup>e</sup> degré. Par P. M.  
 id. p. 42, 43. Question 1. Par M. E. Verhelst.  
 id. p. 199, 200. Question 7. Par M. J. N.  
 SCHL. ZEITSCHR. B. 26. Hist. Liter. Abth. S. 39—42. Eine algebraische Lösung des irreduciblen Falles der cubischen Gleichungen. Von Lehmann.  
 BULL. MATH. T. 4, p. 171—182. A propos d'une lettre de Fermat sur le fameux problème d'Adrien Roman, résolu par F. Viète. Par M. T. Ritter.  
 id. p. 262—265. Sur une classe d'équations dont toutes les racines peuvent s'exprimer linéairement en fonction de l'une d'elles. Par M. A. E. Pellet.  
 N. ARCH. Dl. 8, blz. 75—80. Eene eigenschap van de wortels eener afgeleide vergelijking. Door G. J. Legebeke.  
 GR. ARCH. B. 66, S. 33—45. Ueber die Auflösung der trinomischen Gleichungen durch kettenbruchähnliche Algorithmen. Von K. E. Hofmann.

- GR. ARCH. B. 66, S. 94—107. Beitrag zu den Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades mit rationalen Wurzeln. Von *Th. Simram*.  
 id. B. 67, S. 375—411. Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Von *A. Siebel*.  
 id. S. 446, 447. Bemerkungen zu der T. 55, S. 426, gegebene Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Von *Ligowski*.  
 J. DE L. T. 7, p. 1—32. Exposé des méthodes générales en Mathématiques; résolution et intégration des équations; applications diverses, d'après Hoené Wronski. Par *M. E. West*.  
 CL. M. ANN. B. 18, S. 247—251. Bemerkung über Abel'sche Gleichungen. Von *E. Netto*.  
 id. S. 449—468. Ueber Galois' Theorie der algebraischen Gleichungen. Von *P. Bachmann*.
- 

#### VERGELIJKINGEN MET MEER ONBEKENDEN.

- N. A. DE M. T. 20, p. 227—229. Sur la résolution d'un système particulier de deux équations simultanées du degré  $m$  à deux inconnues. Par *M. Escary*.  
 id. p. 280, 281. Question 329. Par *M. A. Gencis-Martin*.
- 

#### VERGELIJKINGEN (ONBEPAALENDE).

- N. A. DE M. T. 20, p. 150—160, 201—213. Question d'analyse indéterminée proposée par M. Ed. Lucas. Par *M. Moret-Blanc*.  
 id. p. 178—175. Lettre de *M. Desboves*.  
 id. p. 373, 374. Question 1838. Par *M. H. Pisani*.  
 id. p. 425—427. Question 1835. Par *M. Rocchetti*.  
 id. p. 501—506. Exercices de Calcul Algébrique. Par *M. S. Realis*.  
 MATH. T. 1, p. 165, 166. Question 48. Par *J. A.*  
 GR. ARCH. B. 66, S. 332—334. Ueber die Gleichung  $x^y = y^x$ . Von *M. Luxenberg*.
- 

#### VERSCHIKKINGEN EN VERBINDINGEN.

- N. A. DE M. T. 20, p. 1—9. Sur le calcul des dérangements. Par *M. C. Henry*.  
 J. DE L. T. 7, p. 167—184. Sur les permutations alternées. Par *M. D. André*.
- 

#### WAARSCHIJNLIJKHEIDS-BEKENING.

- MATH. T. 1, p. 10. Sur un nouveau principe de calcul des probabilités. Par *P. M.*  
 GR. ARCH. B. 67, S. 1—28. Das Petersburger Problem. Von *E. Czuber*.  
 id. S. 98—102. Wahrscheinlicher Grad der Homogenität einer Mischung. Von *R. Hoppe*.
-

1.

3

5

6

9

14. 78

145.

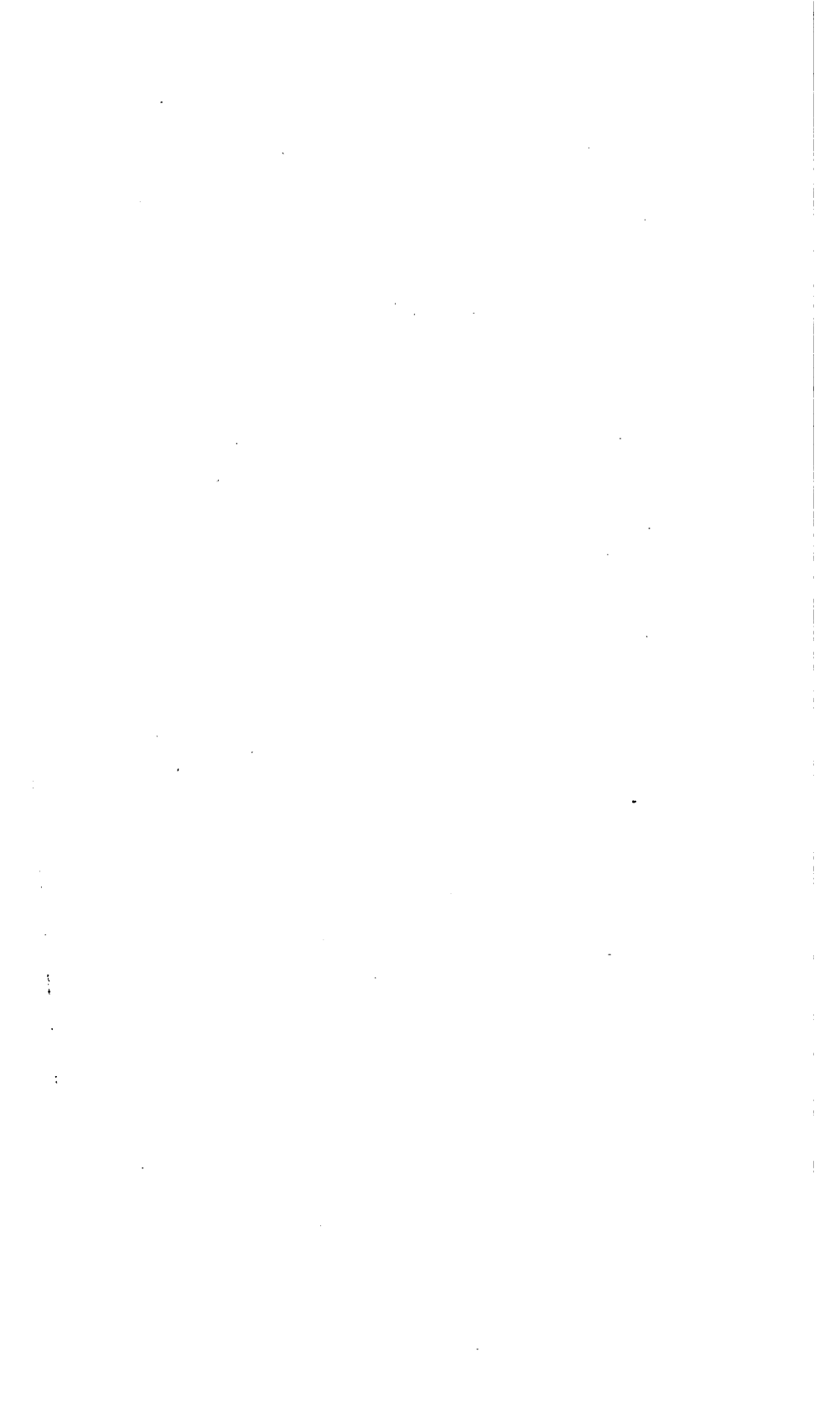


Fig. 2.

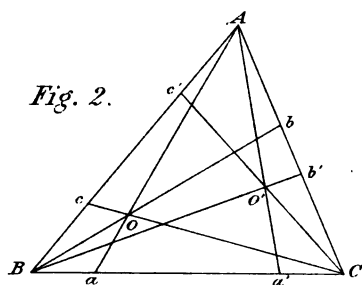


Fig. 4.

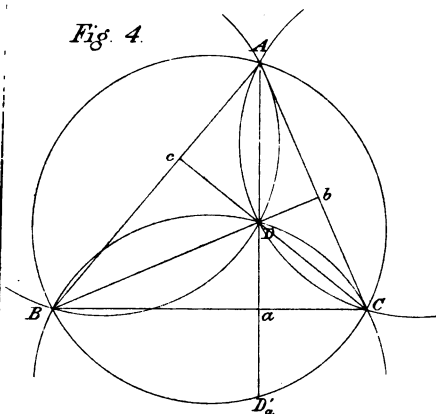


Fig. 6.

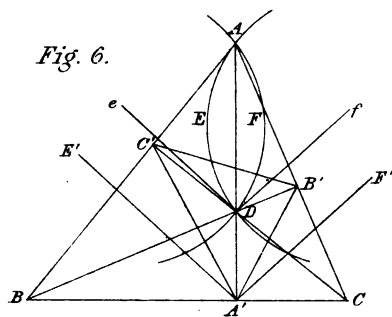
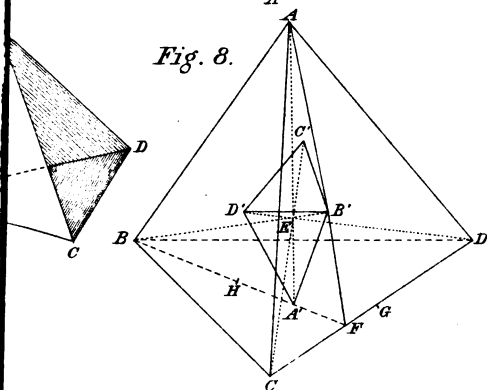
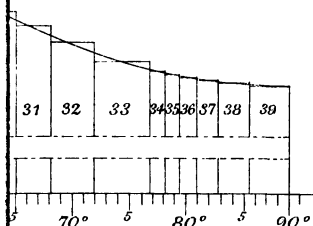
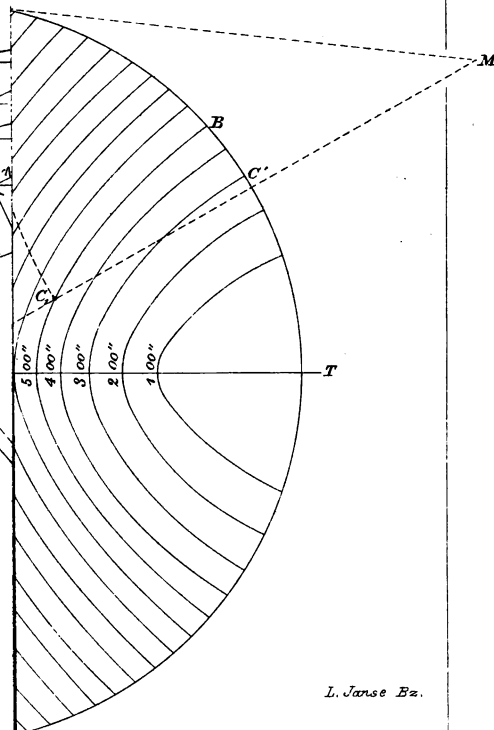
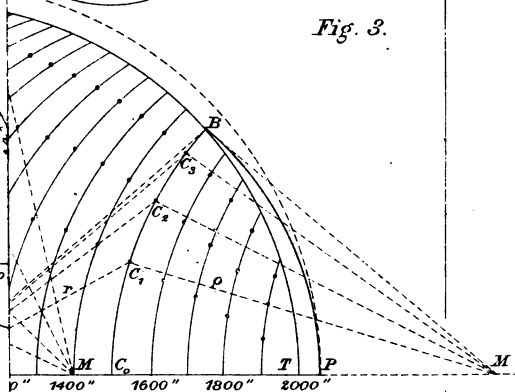
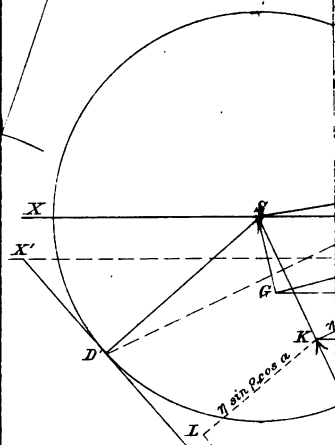
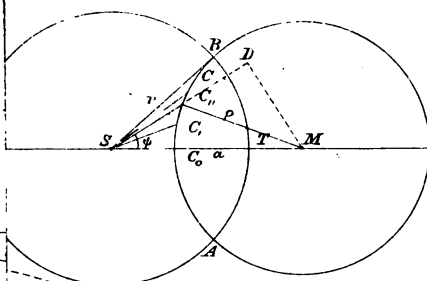
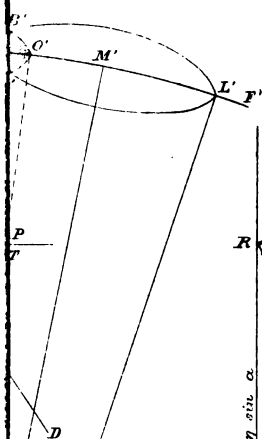


Fig. 8.









L. Jansse Ez.

